$$a(b+c)=ab+ac$$

प्रकाशन
तेलंगाना सरकार, हैद्राबाद

तेलंगाना शासनाचे मोफत वितरण

गणित

इयत्ता सातवी

FREE

गणित

इयत्ता सातवी

MATHEMATICS
Class VII

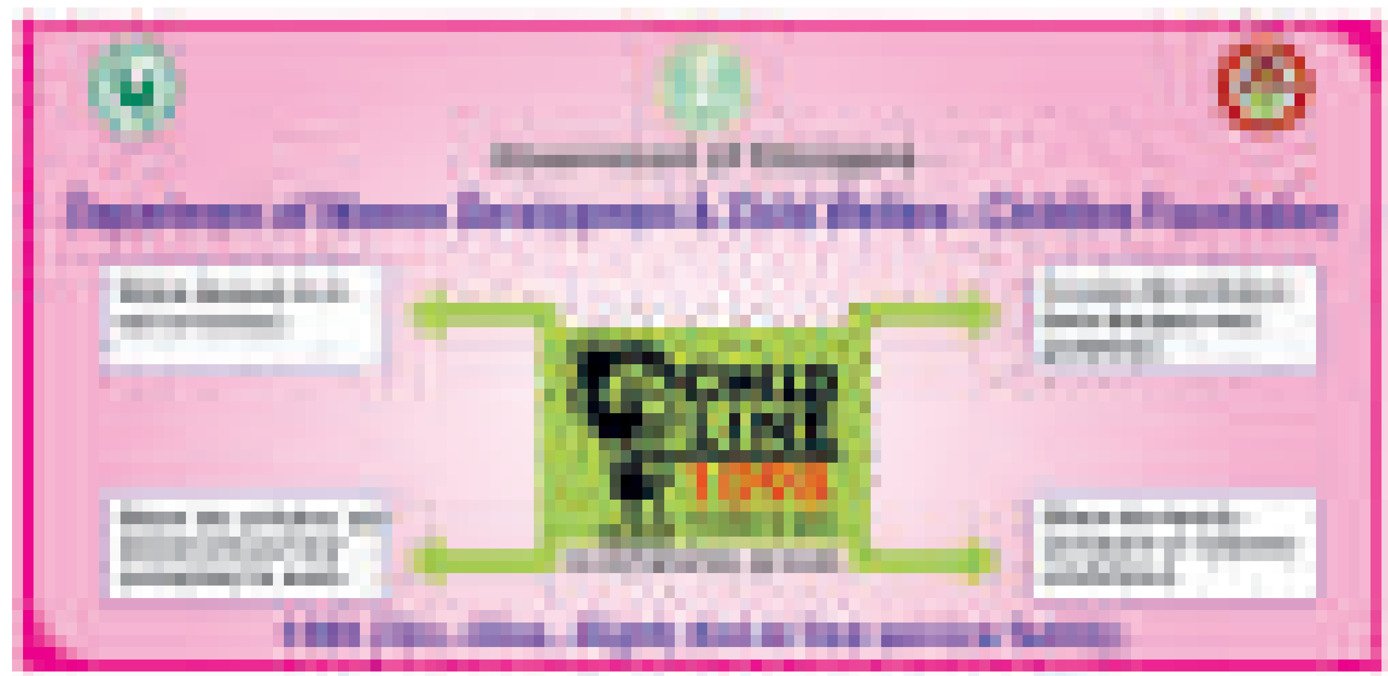
प्रकाशन
तेलंगाना सरकार, हैद्राबाद

तेलंगाना शासनाचे मोफत वितरण

Graph

CHILDREN! THESE INSTRUCTIONS FOR YOU...

- For each and every conceptual understanding, a real life context with appropriate illustrations are given in the textbook. Try to understand the concept through keen reading of context along with observation of illustration.
- While understanding the concepts through activities, some doubts may arise. Clarify those doubts by through discussion with your friends and teachers, understand the mathematical concepts without any doubts.
- "Do this/Do these" exercises are given to test yourself, how far the concept has been understood. If you are facing any difficulty in solving problems in these exercises, you can clarify them by discussing with your teacher.
- The problems given in "Try this/try these", can be solved by reasoning, thinking creatively and extensively. When you face difficulty in solving these problems, you can take the help of your friends and teachers.
- The activities or discussion points given "Think & disicuss" have been given for extensive understanding of the concept by thinking critically. These activities should be solved by discussions with your fellow students and teachers.
- Different typs of problems with different concepts discussed in the chapter are given in an "Exercise" given at the end of the concept/chapter. Try to solve these problems by yourself at home or leisure time in school.
- The purpose of "Do this"/do these", and "Try this/try these" exercises is to solve problems in the presence of teacher only in the class itself.
- Where ever the "project works" are given in the textbook, you should conduct them in groups. But the reports of project works should be submitted individually.
- Try to solve the problems given as homework on the day itself. Clarify your doubts and make corrections also on the day itself by discussions with your teachers.
- Try to collect more problems or make new problems on the concepts learnt and show them to your teachers and fellow students.
- Try to collect more puzzles, games and interesting things related to mathematical concepts and share with your friends and teachers.
- Do not confine mathematical conceptual understanding to only classroom. But, try to relate them with your suroundings outside the classroom.
- Student must solve problems, give reasons and make proofs, be able to communicate mathematically, connect concepts to understand more concepts & solve problems and able to represent in mathematics learning.
- Whenever you face difficulty in achieving above competencies/skills/standards, you may take the help of your teachers.



गणित

इयत्ता सातवी

Mathematics

Class-VII (Marathi)

पाठ्यपुस्तक निर्मिती व प्रकाशन समिती

मुख्य कार्यकारी अधिकारी	:	श्रीमती बी. सेशूकुमारी संचालक, एससीइआरटी, हैद्राबाद.
कार्यकारी संयोजक	:	श्री बी. सुधाकर संचालक, शासकीय पाठ्यपुस्तक मुद्रण हैद्राबाद
प्रमुख संयोजक	:	डॉ. एन. उपेन्दर रेड्डी प्रो. अभ्यासक्रम व पाठ्यपुस्तक निर्मिती एससीईआरटी, हैद्राबाद.
सहायक संयोजक	:	श्री के. यादगीरी प्राध्यापक एससीइआरटी, हैद्राबाद.

तेलंगाना सरकार द्वारे प्रकाशीत, हैद्राबाद.

कायद्याचा आदर करा
हक्क मिळवा

शिक्षण वाढवा
नम्रपणे वागा.

First Published 2013
New Impressions 2014, 2015, 2016, 2017, 2018,2019,2020

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho,
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

तेलंगाना शासनाव्दारे मोफत वितरण 2020-21

Printed in India
at the Telangana Govt. Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

पाठ्यपुस्तक निर्मिती समिती

सदस्य : **श्री डॉ.पी. रमेश** प्राध्यापक, शासकीय आयएएसई, नेल्लोर

श्री एम. रामान्जनेयुलू प्राध्यापक डायट विकाराबाद, रंगारेड्डी

श्री टी.व्ही. रामाकुमार, मुख्याध्यापक, जि.प.हा. मुलुमुडी, नेल्लोर

श्री पी. अशोक मुख्याध्यापक जि.प.हा. कुमारी आदिलाबाद

श्री पी.अन्थोनी रेड्डी मुख्याध्यापक, सेट प्रिंटर्स हाय.स्कूल पी.एन. पेटा नेल्लोर

श्री एस. प्रसादबाबू पीजीटी, एपीटीडब्ल्यूआर स्कूल चंद्रशेखरपुरम, नेल्लोर

श्री के. राजेंदर रेड्डी एस.ए. युपीएस थीमापूर,चांदमपेट, जलगोडा

श्री जी. व्ही. बी. सूर्यनारायणा राजू एसए,मुनीसीपल हायस्कूल कास्पा, विजियानगरम

श्री एस नरसिम्हा मूर्ती, एसए जि.प.हा. मुदीवरपालेम, नेल्लोर

श्री पी. सुरेशकुमार, एसए, जी.एच.एस., विजयनगर कॉलनी, हैद्राबाद

श्री के.वी सुंदर रेड्डी एसए,जि.प हा थक्कसीला, आलमपूर

श्री जी व्यंकटेशवरलू, एसए, जि.प.हा. वेमुलाकोटा, प्रकाशम

श्री सी एच. रमेश, एसए, यूपीएस, नगरम (एम),गुंटर

श्री पी. डी. एल. गणपती शर्मा, एसए, जी एच.एस.जमिस्थानपूर, मनिकेश्वरनगर, हैद्राबाद

समन्वयक : **श्री के.के व्ही रायलू,** प्राध्यापक शासकीय आयएएसइ, मसाबटँक, हैद्राबाद

श्री के. राजेंदर रेड्डी, एसए यू.वी.एस.,, थिमापूर,चंदमपेट, नालगोंडा.

संपादक : **श्री के ब्रम्हा प्रोफेसर** एससीइआरटी, आ.प्र. हैद्राबाद

श्री पी आदिनारायणा सेवानिवृत्त प्राध्यापक न्यू सायन्स कॉलेज अमीरपेट हैद्राबाद

अध्यक्ष गणित पाठ्यपुस्तक आणि अभ्यासक्रम निर्मिती

प्रोफेसर व्ही.कन्नन,गणित आणि सांख्यिकी विभाग, हैद्राबाद विद्यापीठ

मुख्य सल्लागार : **डॉ. एच.के. दिवाण**, शिक्षण सल्लागार, विद्याभवन संस्था, उदयपूर, राजस्थान

अभ्यासविषयक गटातील सहाय्यक सदस्य

श्रीमती. नम्रता बत्रा, विद्याभवन संशोधन संस्था केंद्र उदयपूर राजस्थान

श्री. इंदर मोहन, विद्याभवन संशोधन संस्था केंद्र उदयपूर राजस्थान

श्रीमती. पद्मप्रिया शेराली, गणित गटाचे केंद्र ऋषि व्हॅली स्कूल चित्तूर

कुमारी एम. अर्चना, गणित आणि सांख्यिकी विभाग विद्यापीठ हैद्राबाद

श्री शरण गोपाल गणित आणि सांख्यिकी विभाग, विद्यापीठ हैद्राबाद

चित्र व आराखडा : **श्री. प्रशांत सोनी**, कलाकार, विद्याभवन संशोधन संस्था केंद्र उदयपूर राजस्थान

श्री. शकीर अहमद, ऑपरेटर, विद्याभवन संशोधन संस्था केंद्र उदयपूर राजस्थान

श्री आर. मधुसूदन राव, संगणक ऑपरेटर, एससीईआरटी, आं.प्र. हैद्राबाद

मराठी समन्वयक : **श्री.सरदार धर्मेद्रसिंग चहल,** शासकीय अध्यापक विद्यालय, आदिलाबाद

संपादन : **श्री शिवाजी कदम,** एस.ए., झेड.पी.एस.एस., बेला, जि. आदिलाबाद

मुद्रीत शोधन : **श्री सोनेराव कांबळे,** एस.ए., झेड.पी.एस.एस., बेला, जि.आदिलाबाद

मराठी संगणक चालक* : *राजेश दानका

(आदित्या डी.टी.पी.सेन्टर) आदिलाबाद

दोन शब्द

राज्य पाठ्यक्रम मंडळ एससीपीएफ 2011 च्या विद्यार्थ्यांना त्यांच्या दैनंदिन जीवनात शाळा व शाळेबाहेर उपयोगी पडण्याच्या दृष्टिकोनाचा विचार करून ही निर्मिती केली आहे. शिक्षणाचा हक्क ॲक्ट 2009 ला अनुसरून प्रत्येक विद्यार्थ्यांला जीवनात कौशल्याचा योग्य वापर करता यावा 14 वर्षाखालील मुलांना शिक्षणातील कौशल्याचा विकास करता यावा, शिक्षणातील दर्जा सुधारावा ह्या हेतूने या पुस्तकाचा राष्ट्रीय पातळीवर ह्या पाठ्यपुस्तकाची निर्मिती 2005 चा राष्ट्रीय अभ्यासक्रम आराखडा आणि 2011 मध्ये पाया रचण्यात आला आहे.

पूर्व प्राथमिक शिक्षण पूर्ण झाल्यावर विद्यार्थी प्राथमिक शिक्षणाकडे वळतो. हीच लिंक माध्यमिक शिक्षणाकडे लागून राहावी. आपण जाणतो की, मुलांना वेळ,स्वातंत्र्य इ. दिल्यास ज्याच्या ज्ञानात भर पडते. तरी पण मोठ्याच्या सूचना, कृती, दया, भावना, चांगले गुण, अभिरुची, कारणाची मीमांसा, आव्हान स्वीकारणे या साऱ्या गोष्टी यात सारासार विचार केला आहे. यात आनंददायीपणे गणितं सोडविता येतील याचा विचार केला आहे.

गणितातील साऱ्या प्रक्रिया समजून गणिताचा विकास करता यावा जसे की संख्याज्ञान,अंकगणित, भूमिती, महत्त्वमापन, संख्याशास्त्र ह्या बाबी प्राथमिक वर्गाला शिकता यावा.यावर आधारीत प्रणाली युक्त्या प्रयुक्त्या जीवनातील गणिताचा वापर याचा विचार केला आहे.

या पुस्तकात आश्चर्यचकित करणाऱ्या घटना कृती, प्रयोग, सरावासाठी, प्रयत्न करा, प्रकल्पकार्य शिक्षकास लागणाऱ्या प्रासांगिक घडामोडी उदाहरणातील संकल्पना ह्या साऱ्या गोष्टी या मध्ये सामाविष्ट केल्या आहेत. पाठ योजनातील रचना पूर्वज्ञानावर आधारीत आहेत मूल्यमापन प्रक्रिया अध्ययन अध्यापन प्रक्रिया बालमनावर घडणाऱ्या आहेत.

यात अनेक अनुभवी शिक्षकांचा समावेश असून साऱ्याच्या विचार प्रणालीवरून ह्या पुस्तकाची रचना करण्यात आली आहे. या प्राध्यापक मंडळींनी अनेक पुस्तकाची रचना केली आहे. या दिग्गज मंडळींनी विद्यार्थ्यातील गणित विषयाची भिती काढून टाकण्याचा प्रयत्न केला आहे.

मी सर्व या अनुभवी शिक्षक, प्राध्यापक, संशोधक लेखक, अनुवादक, मुद्रक यांचा सर्वांचा मनःपूर्वक आभार मानते.

या प्रक्रियेचा विकास करून या पुस्तकाची योग्यप्रकारे निर्मिती करणे याला योग्य दर्जा देणे ह्या बाबी याचा विकास करणे याबद्दल या सर्वांचे मी पुनश्च आभार मानते.

ठिकाण : हैद्राबाद
दिनांक : 24 फेब्रुवारी 2012

संचालक
एस.सी.ई.आर.टी., हैद्राबाद

गणित

इयत्ता सातवी

आपले राष्ट्रगीत

– रविंद्रनाथ टागोर

जन गण मन अधिनायक जय हे
भारत भाग्य विधाता ।
पंजाब, सिंधू, गुजरात, मराठा
द्राविड उत्कल बंग ।।
विंध्य हिमाचल यमुना, गंगा
उच्छल जलधितरंग ।
तव शुभ नामे जागे ।
तव शुभ आशिष मागे ।
गाहे तव जय गाथा
जन गण मंगलदायक जय हे
भारत भाग्य विधाता ।
जय हे, जय हे, जय हे
जय जय जय जय हे ।

प्रतिज्ञा

- पैडिमर्री व्यंकटा सुब्बाराव

भारत माझा देश आहे. सारे भारतीय माझे बांधव आहेत. माझ्या देशावर माझे प्रेम आहे. माझ्या देशातल्या समृद्ध आणि विविधतेने नटलेल्या परंपरांचा मला अभिमान आहे. त्या परंपरांचा पाईक होण्याची पात्रता माझ्या अंगी यावी, म्हणून मी सदैव प्रयत्न करीन.

मी माझ्या पालकांचा, गुरुजनांचा आणि वडीलधाऱ्या माणसांचा मान ठेवीन आणि प्रत्येकाशी सौजन्याने वागेन.

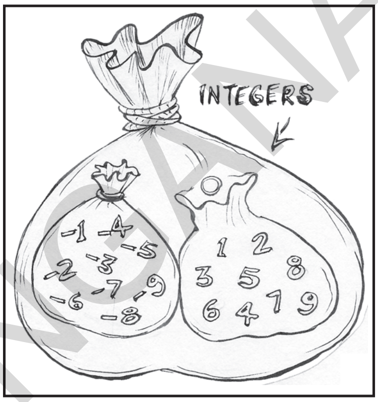
माझा देश आणि माझे देशबांधव यांच्याशी निष्ठा राखण्याची मी प्रतिज्ञा करीत आहे. त्यांचे कल्याण आणि त्यांची समृद्धी ह्यांतच माझे सौख्य सामावले आहे.

पूर्णांक संख्या

1

1.0 प्रस्तावना

आपण संख्या 1, 2, 3, 4, ... पासून मोजण्यास सुरुवात करीत असतो. याच संख्यांना आपणा नैसर्गिक संख्या असे म्हणतो, तर चला या विषयी विचार करूया.



(i) लहानात लहान नैसर्गिक संख्या कोणती ?

(ii) 100 आणि 10000 यांमधील पाच नैसर्गिक संख्या लिहा.

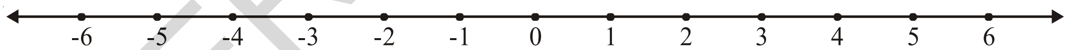
(iii) नैसर्गिक संख्यांचा शेवट कोठे होतो हे तुम्ही सांगू शकता काय?

(iv) कोणत्याही दोन क्रमवार संख्यातील फरक किती असतो ?

'0' चा समावेश करून आपणास नैसर्गिक संख्या 0, 1, 2, 3, 4, ... मांडता येईल यांनाच आपण पूर्णांक संख्या असे म्हणतो.

इयत्ता सहावीत आपण ऋणसंख्या शिकलोत. जर आपण पूर्ण संख्या व ऋण संख्या एकत्र केल्यास आपणास पूर्णांक संख्या मिळते हेच आपण या प्रकरणात शिकणार आहोत. पूर्णांक संख्या त्याचा उपयोग आणि गुणधर्म यांविषयी जाणून घेऊया.

आता काही संख्या खाली दिलेल्या पट्टीवर मांडूया.



(i) संख्या रेषेवरील मोठ्यात मोठी पूर्णांक संख्या कोणती?

(ii) संख्या रेषेवरील सर्वात लहान पूर्णांक संख्या कोणती?

(iii) –3 पेक्षा 1 ही संख्या मोठी आहे का? कारण सांगा?

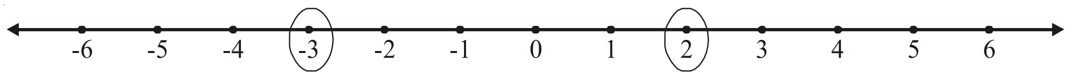
(iv) –6 पेक्षा –3 ही संख्या मोठी आहे का? कारण सांगा?

(v) 4, 6, –2, 0 आणि –5 या संख्या चढत्या क्रमाने लिहा.

(vi) (0 आणि 1), (0 आणि –1) यातील फरकाची तुलना संख्या रेषेवर करा.

स्वाध्याय - 1

1. काही पूर्णांक संख्या खालील संख्येरेषेवर दाखविले आहेत. त्यातील सर्वात लहान आणि मोठी संख्या कोणती?



2. खालील पूर्णांक संख्यांच्या जोड्या पाहा. त्या पूर्णांक संख्या जोडीतील लहानात लहान आणि मोठ्यात मोठी जोडी सांगा.

   (i) –5, –10   (ii) 3, –2   (iii) –8, 5

3. खालील पूर्णांक संख्यांची मांडणी चढत्या क्रमाने करा. (लहानापासून – मोठ्या संख्येकडे)

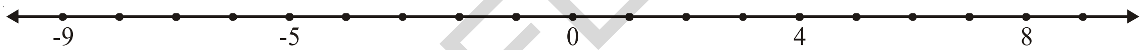
   (i) –5, 2, 1, –8   (ii) –4, –3, –5, 2   (iii) –10, –15, –7

4. खालील पूर्णांक संख्या उतरत्या क्रमाने मांडा. (मोठ्यापासून – लहान संख्येकडे)

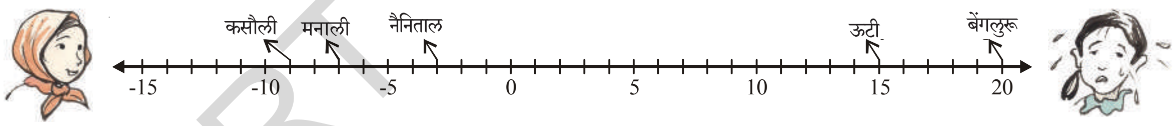
   (i) –2, –3, –5   (ii) –8, –2, –1   (iii) 5, 8, –2

5. पुढील अंक संख्या रेषेवर दाखवा. 6, –4, 0, 4

6. पुढील संख्यारेषा पूर्ण करा.



7. खाली काही शहरांचे सात दिवसाचे तापमान दिले आहे. ते संख्यारेषेवर दाखवा.



   (i) खूण केलेल्या शहराचे तापमान लिहा.

   (ii) कोणत्या शहराचे तापमान जास्त आहे?

   (iii) कोणत्या शहराचे तापमान कमी आहे?

   (iv) कोणत्या शहराचे तापमान 0^0 पेक्षा कमी आहे?

   (v) कोणत्या शहराचे तापमान 0^0 पेक्षा जास्त आहे?

1.1 पूर्णांक संख्येवरील क्रिया

इयत्ता सहावीत बेरीज व वजाबाकी ह्या क्रिया शिकलोत. प्रथम आपण उजळणी करूया व नंतर गुणाकार व भागाकार या क्रियांविषयी शिकूया.

1.1.1 पूर्णांक संख्यांची बेरीज

खालील बेरजेचे निरीक्षण करा.

$4 + 3 = 7$

$4 + 2 = 6$

$4 + 1 = 5$

$4 + 0 = 4$

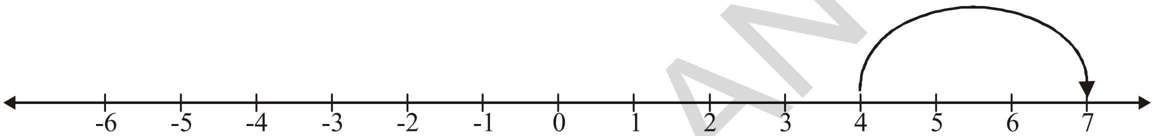
$4 + (-1) = 3$

$4 + (-2) = 2$

$4 + (-3) = 1$

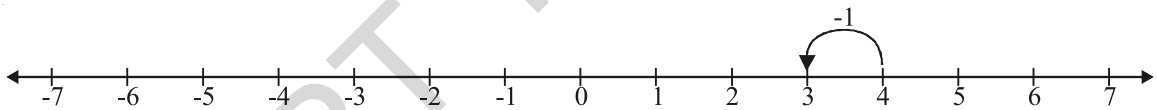
या उत्तराची रीत पाहिलीत का जेव्हा 1 संख्या वाढविली किंवा कमी केली त्याची किंमत 1 ने वाढते किंवा कमी होते. (3, 2, 1, 0, -1, -2, -3).

खालील संख्या रेषेवर, जेव्हा तुम्ही 3 ते 4 मिळवाल तेव्हा उजव्या बाजूला किंमत वाढत जाईल.



त्याचप्रमाणे तुम्ही 2 आणि 1 ते 4 ह्या संख्या वरील संख्या रेषेवर काढू शकता? तुम्हाला दिसेल की, प्रत्येक वेळी उजवीकडे वाढत जातील.

आता पाहूया की, काय घडले. आपण –1 ते 4 मिळवू. वरीलप्रमाणे उत्तर 3 मिळेल. अता आपण संख्या रेषेवर 1 पायरी डावीकडे जाऊ या.



आताच आपण पाहिले की, –2 आणि –3 ची बेरीज वरील संख्यारेषेवर किती आहे? आता तुमच्या लक्षात येईल की, डावीकडे सरकताना प्रत्येक वेळेस बेरजेमध्ये कमी कमी होत जाईल आणि उजवकीडे संख्या वाढत जाईल.

अशा प्रकारे धन संख्या मिळविल्यास उजवीकडे वाढत होते व प्रत्येक वेळेस ऋण संख्या मिळविल्या डावीकडे वाढ होते.

सरावासाठी

1.

$9 + 7$	= 16	$9 + 1$	=
$9 + 6$	= 15	$9 + 0$	=
$9 + 5$	=	$9 + (-1)$	=
$9 + 4$	=	$9 + (-2)$	=
$9 + 3$	=	$9 + (-3)$	=
$9 + 2$	=		

(i) आता संख्या रेषेवर 9 + 2, 9+(-1) आणि 9 +(-3)(-1)+2,(-3)-5 दाखवा.

(ii) जेव्हा तुम्ही एखादी धनपूर्णांक संख्या मिळविता; तेव्हा संख्या रेषेवर कोणत्या बाजूला मोजत असता.

(iii) जेव्हा तुम्ही एखादी ऋणपूर्णांक संख्या मिळविता; तेव्हा संख्या रेषेवर कोणत्या बाजूला मोजत असता.

2. संगीता म्हणाली की, प्रत्येक वेळेस जेव्हा 2 पूर्णांक संख्या मिळविता त्याची बेरीज किंमतीपेक्षा जास्त येते. हे संगीताचे म्हणणे बरोबर आहे का? कारण सांगा.

स्वाध्याय - 2

1. खालील बेरीज संख्या रेषेवर दाखवा.

(i) 5 + 7 (ii) 5 + 2 (iii) 5 + (–2) (iv) 5 + (–7)

2. पूर्ण करा.

(i) 7 + 4	(ii) 8 + (–3)	(iii) 11 + 3	
(iv) 14 + (–6)	(v) 9 + (–7)	(vi) 14 + (–10)	
(vii) 13 + (–15)	(viii) 4 + (–4)	(ix) 10 + (–2)	(x) 100 + (–80)
(xi) 225 + (–145)	(xii) -5 + (7)	(xiii) -15 - (–1)	(xiv)-5 + (–3)

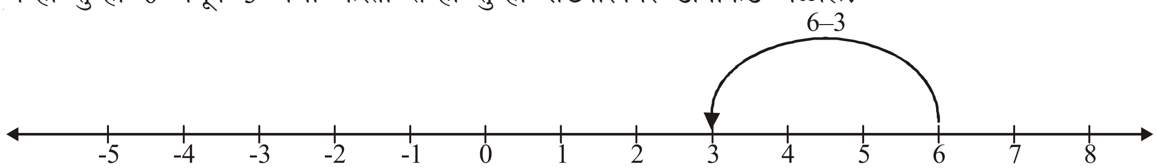
1.1.2 पूर्णांकाची वजाबाकी

खालील वजाबाकीचा अभ्यास करा.

6 – 3 = 3
6 – 2 = 4
6 – 1 = 5
6 – 0 = 6
6 – (–1) = 7
6 – (–2) = 8
6 – (–3) = 9
6 – (–4) = 10

तुम्ही या उत्तराची रीत पाहिलीत का? (3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4) आपण बघितलत की, 1 संख्या जेव्हा कमी होत जाते, त्यावेळेस आपण प्रत्येकात 1 अंकाचा फरक पाहिलात.

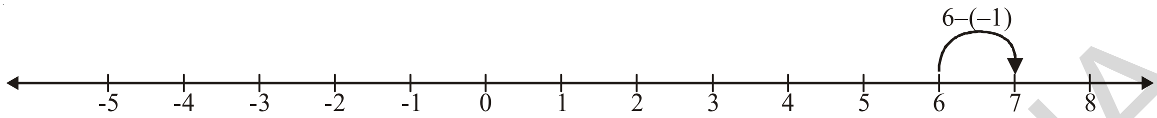
जेव्हा तुम्ही 6 मधून 3 वजा करता तेव्हा तुम्ही संख्यारेषेवर डावीकडे वळाल.



तुम्ही आता याचप्रमाणे 6 मधून 2, 1 ची संख्यारेषेवर दाखवा. तुमच्या असे लक्षात येईल की, तुम्ही प्रत्येक वेळी डाव्याबाजूकडे वळत आहात.

आता आपण पाहू या की 6 मधून −1 ची वजाबाकी करता असताना काय घडते ते पाहूया. वरील पद्धतीनुसार आपणास असे आढळेल की, $6-(-1)=7$

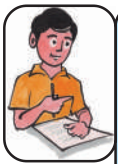
अशाप्रकारे आपण संख्यारेषेवर एक पायरी उजवीकडे वळत आहोत.



याचप्रमाणे तुम्ही −2, −3, −4 पासून 6 पर्यंतची वजाबाकी दाखवू शकता काय ? प्रत्येक वेळेस आपल्या निर्दशनास असे येईल की, ही संख्यारेषा उजवीकडे वाढत आहे.

अशाप्रकारे, जेव्हा तुम्ही धनसंख्या वजा कराल तेव्हा तुम्ही डावीकडे वळाल.

आणि जेव्हा ऋणसंख्या वजा कराल तेव्हा तुम्ही उजवीकडे वळला.



सरावासाठी

रिकाम्या जागा भरा.

1. $8-6 = 2$

   $8-5 = 3$

   $8-4 =$

   $8-3 =$

   $8-2 =$

   $8-1 =$

   $8-0 =$

   $8-(-1) =$

   $8-(-2) =$

   $8-(-3) =$

   $8-(-4) =$

   (i) आता संख्या रेषेवर 8-6, 8-1, 8-0, 8-(-2), 8-(-4)

   (ii) जेव्हा तुम्ही धनपूर्णांकाची वजाबाकी करता तेव्हा तुम्ही संख्यारेषेवर कोणत्या दिशेने वळता?

   (iii) जेव्हा तुम्ही ऋणपूर्णांकाची वजाबाकी करता तेव्हा तुम्ही संख्यारेषेवर कोणत्या दिशेने वळता?

2. रिचा विचारात पडली की, ती वजाबाकी करते त्यावेळेस येणारी संख्या त्या दोन अंकापेक्षा लहान असते. रिचाच्या उत्तराशी तुम्ही सहमत आहात काय? कारण सांगा.

स्वाध्याय - 3

1. खालील वजाबाकी संख्या रेषेवर दाखवा.

(i) 7 – 2	(ii) 8 – (– 7)	(iii) 3 – 7
(iv) 15 – 14	(v) 5 – (– 8)	(vi) (–2) - (–1)

2. सोडवा

(i) 17 – (–14)	(ii) 13 – (– 8)	(iii) 19 – (– 5)
(iv) 15 – 28	(v) 25 – 33	(vi) 80 – (– 50)
(vii) 150 – 75	(viii) 32 – (– 18)	(ix) (-30)- (25)

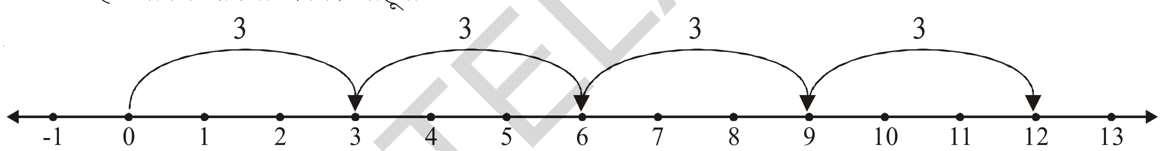
3. स्पष्ट करा की, –6 जे संख्या ऋणपूर्णांक आणि पूर्ण संख्या ची बेरीज आहे.

1.1.3 पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार

आता आपण पूर्णांकसंख्येचा गुणाका करू या.

आपणास माहीत आहे की, 3+3+3+3=4 c 3 (4 वेळा 3)

हे आपण संख्या रेषेवर पाहूया

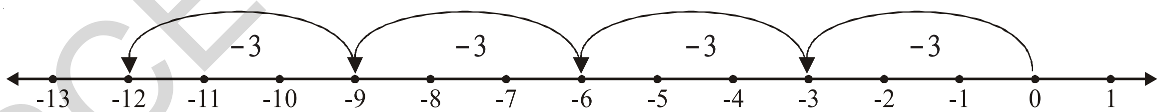


अशा प्रकारे 4 c 3 म्हणजे प्रत्येक वेळेला 4 हा 3 ने उजवीकडे पुढे जाईल.

म्हणून 4 c 3 = 12

$4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$

हेच संख्यारेषेवर दाखवता येईल.

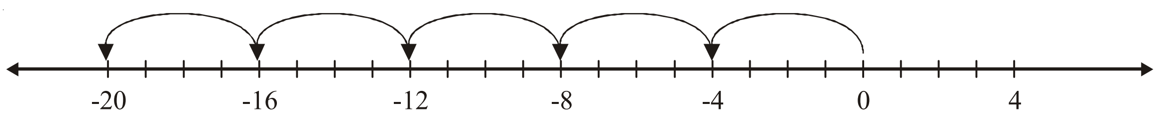


अशाप्रकारे, 4 (–3) म्हणजे 4 ही संख्या संख्यारेषेवर प्रत्येक वेळी 0 पासून उजवीकडे 3 पायरी पुढे जाईल.

म्हणून $4 \times (-3) = -12$

त्याचप्रमाणे, $5 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$

हेच संख्या रेषेवर दाखवता येईल.



अशाप्रकारे 5 × -4 म्हणजे 5 हा प्रत्येकवेळी संख्या रेषेवर 0 पासून डावीकडे 4 ने पुढे जातो.

म्हणून $5 \times -4 = -20$

त्याचप्रमाणे, $2 \times -5 = (-5) + (-5) = -10$

$3 \times -6 = (-6) + (-6) + (-6) = -18$

$4 \times -8 = (-8) + (-8) + (-8) + (-8) = -32$

सरावासाठी

1. सोडवा.

(i) 2×-6 (ii) 5×-4 (iii) 9×-4

गुणाकार करा. -4×3

खालील उदाहरणाचा अभ्यास करा.

$4 \times 3 = 12$

$3 \times 3 = 9$

$2 \times 3 = 6$

$1 \times 3 = 3$

$0 \times 3 = 0$

$-1 \times 3 = -3$

$-2 \times 3 = -6$

$-3 \times 3 = -9$

$-4 \times 3 = -12$

गुणक जर 1 ने कमी केला तर गुणाकार 3 ने कमी होतो.

अशाप्रकारे या पद्धतीनुसार, $-4 \times 3 = -12$.

आपणास हे माहीत आहे की, $4 \times -3 = -12$

म्हणून, $-4 \times 3 = 4 \times -3 = -12$

चिन्हांचे निरीक्षण केले असता गुणाकारातील फरक जाणवेल. वरील पद्धतीनुसार आपणास असे म्हणता येईल की,

$4 \times -5 = -4 \times 5 = -20$

$2 \times -5 = -2 \times 5 = -10$

$3 \times -2 =$

$8 \times -4 =$

$6 \times -5 =$

वरील उदाहरणावरून असे लक्षात येते की, धनपूर्णांकसंख्या आणि ऋणपूर्णांकसंख्येचा गुणाकार हा ऋणपूर्णांकसंख्या येतो

1.1.3 (अ) दोन ऋणपूर्णांकांचा गुणाकार

जर आपण -3 आणि -4 यांचा गुणाकार केला तर काय होईल?

खालील उदाहरणे पाहू.

$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9$

$-3 \times 2 = -6$

$-3 \times 1 = -3$

$-3 \times 0 = 0$

$-3 \times -1 = 3$

$-3 \times -2 = 6$

$-3 \times -3 = 9$

$-3 \times -4 = 12$

ही उदाहरणे तुम्ही पाहिलीत ना? जेवढ्या वेळा गुणक एकने वाढेल तेव्हा गुणाकारसुद्धा 3 ने वाढल्याचे तुमच्या लक्षात येईल.

आता -4 आणि -3 यांचा गुणाकार करून खालील रिकाम्या जागा भरा.

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12$

$-4 \times 2 = -8$

$-4 \times 1 = -4$

$-4 \times 0 = 0$

$-4 \times -1 =$ ______

$-4 \times -2 =$ ______

$-4 \times -3 =$ ______

तुमच्या असे निदर्शनास येईल की, जितक्यावेळा गुणक 1 ने कमी केला तितक्या वेळा गुणाकार 4 ने वाढत आहे. म्हणून वरील दोन उदाहरणांवरून, $-3 \times -4 = -4 \times -3 = 12$

तुम्ही हे अवलोकन केले आहे की,

$-3 \times -1 = 3$ $\quad$ $-4 \times -1 = 4$

$-3 \times -2 = 6$ $\quad$ $-4 \times -2 = 8$

$-3 \times -3 = 9$ $\quad$ $-4 \times -3 = 12$

म्हणून प्रत्येक वेळेस दोन ऋण पूर्णांकाचा गुणाकार केल्यास धनपूर्णांक संख्याच येते.

कृती 1

खालील चौकट प्रत्येक ओळीतील पहिल्या रकान्याचा गुणाकार करून पूर्ण करा.

×	3	2	1	0	–1	–2	–3
3	9	6	3	0	–3	–6	–9
2	6	4	2	0			
1							
0							
–1	–3	–2	–1	0	1	2	3
–2							
–3							

(i) दोन धन पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार धन पूर्णांकसंख्याच असतो काय?

(ii) दोन ऋण पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार धन पूर्णांकसंख्याच असतो काय?

(iii) धन पूर्णांकसंख्या व ऋण पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार ऋण पूर्णांकसंख्याच असतो काय?

1.1.3 (ब) दोन अधिक ऋणपूर्णांक संख्येचा गुणाकार

आपण यापूर्वी शिकलो आहोत की, दोन ऋण पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार धन पूर्णांकसंख्या असते. परंतु 3, 4, 5, इ. ऋण पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार कोणती संख्या असेल?

(i) $(-2) \times (-3) = 6$

(ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) = [(-2) \times (-3)] \times (-4) = 6 \times (-4) = -24$

(iii) $(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) = [(-2) \times (-3) \times (-4)] \times (-5) = (-24) \times (-5) = 120$

(iv) $[(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6)] = 120 \times (-6) = -720$

वरील गुणाकारावरून आपणास असे अनुमान काढत येईल की,

(i) दोन ऋण पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार धन पूर्णांकसंख्या असते.

(ii) तीन ऋण पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार ऋण पूर्णांकसंख्या असते.

(iii) चार ऋण पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार धन पूर्णांकसंख्या असते.

(iv) पाच ऋण पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार ऋण पूर्णांकसंख्या असते.

सहा ऋण पूर्णांकसंख्येचा गुणाकार धन असेल का ऋण असेल? कारण सांगा.

सरावासाठी

(अ) $(-1) \times (-1) =$ ——

(ब) $(-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

(क) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

(ड) $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) =$ ——

आपण पुन्हा असे पाहू की, वरील 'अ' व 'क' या उदाहरणात ऋणपूर्णांकसंख्या दोन किंवा चार वेळा आल्या तेव्हा गुणाकार धन पूर्णांकसंख्या तर 'ब' व 'ड' या उदाहरणात गुणक हे विषम वेळा आले आहे व त्यांचे गुणाकार हे ऋणसंख्या आहे.

म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की, जर ऋण गुणकांची संख्या विषम असेल तर त्यांचा गुणाकार ऋण असतो. तसेच जर ऋणगुणकांची संख्या सम असेल तर त्यांचा येणारा गुणाकार हा धन असतो.

स्वाध्याय - 4

1. रिकाम्या जागा भरा.

(i) $(-100) \times (-6) =$ ....

(ii) $(-3) \times$ .... $= 3$

(iii) $100 \times (-6) =$ ....

(iv) $(-20) \times (-10) =$ ....

(v) $15 \times (-3) =$ ....

2. खालील गुणाकार सोडवा.

(i) $3 \times (-1)$ (ii) $(-1) \times 225$

(iii) $(-21) \times (-30)$ (iv) $(-316) \times (-1)$

(v) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (vi) $(-12) \times (-11) \times (10)$

(vii) $9 \times (-3) \times (-6)$ (viii) $(-18) \times (-5) \times (-4)$

(ix) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (x) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

3. एका शीतकरण प्रक्रियेत कमीत कमी तापमान हे 40^0 सेल्सिअस एवढे आहे. जर हे तापमान दर तासी 5^0 सेल्सिअसने कमी होत गेले तर दहा तासानंतर त्या एकंदर शीतकरण प्रक्रियेची परिस्थिती काय असेल याचा अंदाज करा.

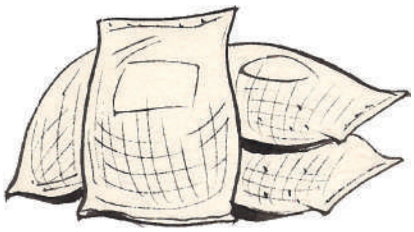
4. वर्गातील एका चाचणीसाठी 10 प्रश्न आहेत. प्रत्येक अचुक प्रश्नास 3 गुण आणि चुकिच्या उत्तरास -1 गुण तर उत्तर न लिहिल्यास 0 गुण अशी वाटणी केली.

(i) गोपीने 5 प्रश्नाची उत्तरे बरोबर आणि 5 प्रश्नाची उत्तरे चूक लिहिली तर तिचे गुण किती?

(ii) रेश्माने 7 प्रश्नांची उत्तरे बरोबर सोडविली. 3 उत्तरे चूक लिहिली तर तिचे गुण किती.

(iii) रश्मीने 3 प्रश्नांची उत्तरे बरोबर तर 4 उत्तरे चूक लिहिली तर तिला एकंदर किती गुण मिळाले? तिने एकंदर 7 प्रश्न सोडविले.

5. एका तांदूळ व्यापाऱ्याने बासमाती तांदळाची एक गोणी ₹10 नफा घेऊन विकली. तसेच साधारण तांदूळ ₹5 तोट्याने विकली तर



(i) त्याने 3000 बासमाती तांदुळाच्या गोणी आणि 5000 साधारण तांदुळाच्या गोणी दरमहा विकल्या तर त्याचा नफा आणि तोटा किती?

(ii) जर त्याने साधारण तांदळाच्या 6400 गोणी विकल्या असतील तर त्याला तोटा भरून निघण्यासाठी बासमाती तांदुळाच्या किती गोण्या विकाव्या लागतील?

6. रिकाम्या जागी योग्य पूर्णांक संख्या वापरा.

(i) $(-3) \times$ ________ $= 27$ (ii) $5 \times$ ________ $= -35$

(iii) ________ $\times (-8) = -56$ (iv) ________ $\times (-12) = 132$

1.1.4 पूर्णांक संख्येचा भागाकार

आपणास माहीत आहे की, भागाकर हा गुणाकाराच्या विरुद्ध क्रिया असतो.
त्यासाठी आपण काही उदाहरणे पाहूया.

आपणास माहीत आहे की, $3 \times 5 = 15$

म्हणून, $15 \div 5 = 3$ or $15 \div 3 = 5$

त्याचप्रमाणे, $4 \times 3 = 12$

म्हणून, $12 \div 4 = 3$ or $12 \div 3 = 4$

प्रत्येक नैसर्गिक संख्येला कमीत कमी दोन नैसर्गिक भाग असून शकतात.

आपण यांचे अवयव आणि विधान लिहू शकतो काय?

खालील उदाहरणे अभ्यासा व पूर्ण करा.

गुणाकारउदाहरणे	भागाकाराची उदाहरणे	
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$,	$(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$,	$(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div (-8) = (-9)$,	$72 \div (-9) = (-8)$
$(-3) \times (-7) =$ ________	______ $\div (-3) =$ _____ ,	________________
$(-8) \times 4 =$ __________	________________ ,	________________
$5 \times (-9) =$ __________	________________ ,	________________
$(-10) \times (-5) =$	________________ ,	________________

वरील उदाहरणावरून आपणास असे लक्षात येते की, जेव्हा आपण ऋणपूर्णांक संख्येला धनपूर्णांक संख्येने भागले असता किंवा धनपूर्णांक संख्येला ऋणपूर्णांकसंख्येने भागले असता आपण पूर्ण संख्येला (–) वापरतो. अशा प्रकारे आपणास ऋण गुणक मिळतो.

हे करा

1. सोडवा

(i) $(-100) \div 5$ (ii) $(-81) \div 9$ (iii) $(-75) \div 5$ (iv) $(-32) \div 2$

(v) $125 \div (-25)$ (vi) $80 \div (-5)$ (vii) $64 \div (-16)$

सरावासाठी

आपण असे म्हणून शकतो काय $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$?

तपासा जर

(i) $90 \div (-45)$ आणि $(-90) \div 45$ (ii) $(-136) \div 4$ आणि $136 \div (-4)$

आपण आणखी असे पाहिले की,

$(-12) \div (-6) = 2$; $(-20) \div (-4) = 5$; $(-32) \div (-8) = 4$; $(-45) \div (-9) = 5$

यावरून आपण असे सांगू शकतो की, दोन ऋणपूर्णांकाचा भागाकार धन असतो.

हे करा

1. सोडवा

(i) $-36 \div (-4)$ (ii) $(-201) \div (-3)$ (iii) $(-325) \div (-13)$

1.2 पूर्णांकसंख्येचे गुणधर्म

आपण सहाव्या इयत्तेत पूर्ण संख्येचे गुणधर्म शिकलो आहोत. यावेळेस पूर्णांकसंख्येचे गुणधर्म शिकणार आहोत.

1.2.1 पूर्णांकसंख्येचे बेरजेचे गुणधर्म

(i) संवृत्त गुणधर्म

अभ्यासा.

विधान	निष्कर्ष
$5 + 8 = 13$	बेरीज ही पूर्णसंख्या आहे.
$6 + 3 =$	
$13 + 0 =$	
$10 + 2 =$	
$0 + 6 = 6$	बेरीज ही पूर्णसंख्या आहे.

दोन पूर्ण संख्येची बेरीज ही एक पूर्ण संख्या असते काय? तुम्हाला याचे उत्तर होय असेच मिळेल. म्हणून आपण असो म्हणू शकतो की, दोन पूर्ण संख्येची बेरीज हे संवृत्त असते.

वरील पूर्णांकसंख्या संवृत्त हा नियम पाळतात काय? खालील बेरजांचा अभ्यास करून तक्ता पूर्ण करा.

विधान	निष्कर्ष
$6 + 3 = 9$	बेरीज ही पूर्णांकसंख्या आहे
$-10 + 2 =$	
$-3 + 0 =$	
$-6 + 6 = 0$	
$(-2) + (-3) = -5$	
$7 + (-6) =$	बेरीज ही पूर्णांकसंख्या आहे

दोन पूर्णांकसंख्येची बेरीज ही नियमीत पूर्ण संख्या असते काय?

तुम्ही एखादे असे उदाहरण देऊ शकता का? की ज्या दोन पूर्णांक संख्यांची बेरीज ही पूर्णांक नसते. अशाप्रकारचे उदाहरण तुम्हाला सापडणार नाही. **म्हणून पूर्णांक हे संवृत्त असतात.**

सामान्यतः असे सांगता येईल की, कोणतेही दोन पूर्णांक 'अ' व 'ब', अ+ब पूर्ण संख्याच असते.

(ii) क्रमनिरपेक्षतेचे गुणधर्म

अभ्यासा व रिकाम्या जागा पूर्ण करा

विधान 1	विधान 2	निष्कर्ष
$4 + 3 = 7$	$3 + 4 = 7$	$4 + 3 = 3 + 4 = 7$
$3 + 5 =$	$5 + 3 =$	
$3 + 0 =$	$0 + 3 =$	

त्याचप्रमाणे आपण आणखी काही उदाहरणे देऊ शकतो. ज्याची बेरीज वेगळी असेल अशी संख्या सांगू शकाल काय? तुम्हाला अशी संख्या शोधता येणार नाही. म्हणून आपण सांगू शकतो की, हाच गुणधर्म क्रमनिरपेक्षतेचा आहे.

अभ्यासा व रिकाम्या जागा पूर्ण करा.

विधान 1	विधान 2	निष्कर्ष
$5 + (-6) = -1$	$(-6) + 5 = -1$	$5 + (-6) = (-6) + 5 = -1$
$-9 + 2 =$	$2 + (-9) =$	
$-4 + (-5) =$	$(-5) + (-4) =$	

संख्या अदला बदल केल्यास बेरजेत बदल होतो काय हे पाहिलेत का? नाही. **हाच गुणधर्म क्रमनिरपेक्ष बेरजेचा आहे.**

सामान्यतः कोणतीही पूर्णांक संख्या a आणि b, a+b=b+a

(iii) साह्चर्य गुणधर्म

खालील उदाहरणे अभ्यासा

(i) $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$
$5 + 4 = 2 + 7$
$9 = 9$

(ii) $(-2 + 3) + 5 = -2 + (3 + 5)$
$1 + 5 = -2 + 8$
$6 = 6$

(iii) $(-2 + 3) + (-5) = (-2) + [3 + (-5)]$
$1 + (-5) = (-2) + (-2)$
$-4 = -4$

(iv) $[(-2) + (-3)] + (-5) = -2 + [(-3) + (-5)]$
$-5 + (-5) = -2 + (-8)$
$-10 = -10$

आपण प्रत्येक वेळेस पाहिले की, प्रत्येकदा बेरीज सारखीच आहे.

म्हणून पूर्णांकसंख्या ह्या साह्चर्य ह्या गुणधर्मांचे पालन करतात.

सरावासाठी

1. (i) $(2 + 5) + 4 \quad = \quad 2 + (5 + 4)$

   (ii) $(2 + 0) + 4 \quad = \quad 2 + (0 + 4)$

साह्चर्य या गुणधर्माचे पालन पूर्ण संख्याच करते काय?
आणखीन दोन उदाहरणे द्या व उत्तरे लिहा.

सामान्यपणे कोणतेही तीन पूर्णांकसंख्या a, b आणि c, (a + b) + c = a + (b + c)

(iv) बेरजेचे एकक

खालील उदाहरण काळजीपूर्वक अभ्यासा व पूर्ण करा.

$-2 + 0 = -2$

$5 + 0 = 5$

$8 + 0 =$

$-10 + 0 =$

एखाद्या संख्येत शून्य ही संख्या मिळविल्यास तीच संख्या प्राप्त होते.

सामान्यतः कोणतीही पूर्णसंख्या a, a+0 = 0 + a= a

सरावासाठी

1. खालील बेरजा करा.

   (i) $2 + 0 =$

   (ii) $0 + 3 =$

   (iii) $5 + 0 =$

2. अशाचप्रकारे अनेक शून्य मिळवा आणि पूर्ण संख्या या गुणधर्माचे पालन करते काय पहा!

(v) व्यस्त संख्येचे गुणधर्म

जर 3 मध्ये 0 मिळविल्यास काय उत्तर मिळेल?

खालील उदाहरण अभ्यासा.

$3 + (-3) \quad = 0$

$7 + (-7) \quad = 0$

$(-10) + 10 = 0$

अशाच पूर्णांकसंख्यांच्या जोड्या शोधा व तपासून पाहा.

वरील उदाहरणातील जोड्यांमधील एका जोडीस व्यस्त संख्येचा गुणधर्म म्हणतात.

> **सामान्यतः कोणताही पूर्णांक अंक 'a' हा (–a) तो म्हणजे a + (–a) = 0 दोन्ही पूर्णांकांना व्यस्त गुणधर्म म्हणतात.**

1.2.2 पूर्णांकाच्या गुणाकाराचे गुणधर्म

(i) क्रमनिरपेक्ष

खालील विधानांचा अभ्यास करा आणि सारणी पूर्ण करा.

विधान	निष्कर्ष
$9 \times 8 = 72$	गुणाकार हा पूर्णांकसंख्या आहे.
$10 \times 0 =$	
$-15 \times 2 =$	
$-15 \times 3 = -45$	
$-11 \times -8 =$	
$10 \times 10 =$	
$5 \times -3 =$	

वरील दिलेल्या जोड्यांपैकी अशी एखादी जोडी जी पूर्णांक नाही हे शक्य आहे काय की, ज्यांचा गुणाकार हा पूर्णांकसख्या नाहीत?

टीप : लक्षात ठेवा की, दशांश अपूर्णांकही संख्या पूर्णांकसंख्या नसते.
म्हणून पूर्णांक हे सहसंबंधाचे गुणधर्म पाळतात.

> **सामान्यतः कोणतेही दोन पूर्णांक a आणि b त्यांचा गुणाकार म्हणजे, a × b हा सुद्धा पूर्णांकच असतो.**

सरावासाठी

1. खालील गुणाकार करा.
   (i) $2 \times 3 =$ _______
   (ii) $5 \times 4 =$ _______
   (iii) $3 \times 6 =$ _______
2. त्याचप्रमाणे दोन पूर्णांकाचा गुणाकार करा व तो गुणाकार पूर्णांकसखंयाच आहे काय ? याचा शोध घ्या.

(ii) क्रमनिरपेक्ष गुणधर्म

आपणास माहिती आहे की, गुणाकारात पूर्णांकाचा सहसंबंध असतो.

विधान 1	विधान 2	निष्कर्ष
$5 \times (-2) = -10;$	$(-2) \times 5 = -10$	$5 \times (-2) = (-2) \times 5 = -10$
$(-3) \times 6 =$	$6 \times (-3) =$	
$-20 \times 10 =$	$10 \times (-20) =$	

म्हणून गुणाकारातसुद्धा सहसंबंध गुणधर्म पाळले जातात.

सामान्यतः कोणतेही दोन पूर्णांकसंख्या a आणि b, $a \times b = b \times a$

(iii) साह्चर्यचं गुणधर्म

खालील 2,-3, -4 चे गुणाकार अभ्यासा.

$[2 \times (-3)] \times (-4)$ आणि $2 \times [(-3) \times (-4)]$

आपण पाहिले आहे की,

$[2 \times (-3)] \times (-4)$ आणि $2 \times [(-3) \times (-4)]$

$= (-6) \times (-4)$ $\qquad = 2 \times 12$

$= 24$ $\qquad = 24$

पहिल्या उदाहरणात 2, -3 एकाच गटातील आणि दुसरया गटामध्ये -3, -4 एकाच गटात आहेत. परंतु दोघांचाही गुणाकार सारखाचा आहे

म्हणून, $[2 \times (-3)] \times [(-4)] = 2 \times [(-3) \times (-4)]$

एकाच गटातील पूर्णांकाच्या गुणाकारात काही परिणाम होतो काय? नाही, परिणाम होत नाही.

यावरून असे सांगता येईल की, कोणत्याही तीन पूर्णांकाच्या गटातील गुणाकारात संघटन असते.

सामान्यता कोणतीही पूर्णांकसंख्या a, b आणि c, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

सोडवा

1. Is $[(-5) \times 2)] \times 3 = (-5) \times [(2 \times 3)]$?

2. Is $[(-2) \times 6] \times 4 = (-2) \times [(6 \times 4)]$?

सरावासाठी

$(5 \times 2) \times 3 = 5 \times (2 \times 3)$

हे गुणधर्म पूर्णसंख्यांकासाठी असू शकते काय? याचा ताळा करण्यासाठी आणखी काही उदाहरणे द्या.

(iv) वितरणाचे गुणधर्म

आपणास माहीत आहे की, $9 \times (10 + 2) = (9 \times 10) + (9 \times 2)$

बेरजेच्या गुणधर्मावरून गुणाकाराच्या वितरणाचे गुणधर्म हे पूर्णांक संख्येकरिताच असतात.

हे सत्य आहे काय ते पाहूया.

(i) $-2 \times (1 + 3) = [(-2) \times 1] + [(-2) \times 3]$

$-2 \times 4 = -2 + (-6)$

$-8 = -8$

(ii) $-1 \times [3 + (-5)] = [(-1) \times 3] + [(-1) \times (-5)]$

$-1 \times (-2) = -3 + (+5)$

$2 = 2$

तपासा $-3 \times (-4+2) = [(-3) \times (-4)] + [-3 \times (2)]$

तुम्ही प्रत्येकवेळी पाहिलंत की, डावी बाजू ही उजव्या बाजूएवढीच असते.

म्हणून बेरजेच्या वितरणाच्या गुणधर्मात दोन्ही बाजूंना समान महत्त्व असते.

सामान्यतः कोणताही पूर्णांक a, b आणि c, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

(v) वितरणाचे गुणधर्म

0 हा गुणाकार अविकारक घटक आहे.

$2 \times 1 = 2$

$-5 \times 1 = -5$

$-3 \times 1 =$ ______

$-8 \times 1 =$ ______

$1 \times -5 =$ ______

तुम्ही पाहिलंत गुणाकारात कोणत्याही पूर्णांकास 1 ह्या संख्येने गुणल्यास पूर्णांकात कोणत्याही प्रकारचा बदल होत नाही.

सामान्यतः कोणताही पूर्णांक ‘a’, $a \times 1 = 1 \times a = a$

(vi) शून्याने गुणणे

आपणास माहीत आहे की, कोणत्याही पूर्णांक शून्याने गुणल्यास गुणाकार शून्यच येते. यासाठी खालील उदाहरणे अभ्यासा

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-8) =$ ______

$9 \times 0 =$ ______

कोणताही पूर्णांकास शून्याने गुणल्यास गुणाकार शून्यच येतो.

सामान्यतः कोणताही पूर्णांक a, $a \times 0 = 0 \times a = 0$

स्वाध्याय 5

1. खालील उदाहरणे तपासा

   (i) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

   (ii) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$

2. (i) कोणताही पूर्णांक a असेल तर $(-1) \times a$?

   (ii) असा पूर्णांक शोधा की ज्याचा गुणाकार (-1) सोबत 5 आहे.

3. गुणधर्माचा वापर करून गुणाकार करा.

   (i) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ (ii) $8 \times 53 \times (-125)$

   (iii) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$ (iv) $(-41) \times 102$

   (v) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$ (vi) $7 \times (50 - 2)$

   (vii) $(-17) \times (-29)$ (viii) $(-57) \times (-19) + 57$

1.2.3 पूर्णांक संख्येच्या वजाबाकीचे गुणधर्म

(i) वजाबाकीचे संबंध

आपण एखाद्या पूर्णांकातून एखादा पूर्णांक वजा केल्यास उत्तरही पूर्णांक संख्याच असू शकते काय ?

$9 - 7 =$ ______

$7 - 10 =$ ______

$2 - 3 =$ ______

$-2 - 3 =$ ______

$-2 - (-5) =$ ______

$0 - 4 =$ ______

आपले निष्कर्ष काय? आपण असे म्हणू शकतो काय ? वजाबाकी करताना या गुणधर्माचे पालन केल्या जाते.

> **म्हणून कोणताही पूर्णांक a आणि b, a – b हे सुद्धा पूर्णांकच असतात.**

(ii) वजाबाकीचे सहसंबंधाचे गुणधर्म

याकरिता काही उदाहरणे पाहू. 6 आणि –4 चा विचार करा

$6 - (-4) = 6 + 4 = 10$ and

$-4 - (6) = -4 - 6 = -10$

म्हणून, $6 - (-4) \neq -4 - (6)$

वजाबाकी या क्रियेत सहसंबंधाचे गुणधाराच्या बाहेर नाही.

सरावासाठी

सहसंबंधाचे गुणधर्म पाळणारे पाच पूर्णांकाची वजाबाकीचे 5 उदाहरणे लिहा.

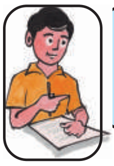
1.2.4 भागाकाराचे गुणधर्म

(i) सहसंबंधाचे गुणधर्म

खालील तक्ता अभ्यासा व पूर्ण करा

विधान	निष्कर्ष	विधान	अनुमान
$(-8) \div (-4) = 2$	पूर्णांक संख्या आहे.	$(-8) \div 4 = \frac{-8}{4} = -2$	
$(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$	पूर्णांक संख्या नाही.	$4 \div (-8) = \frac{4}{-8} = \frac{-1}{2}$	

तुमचे निष्कर्ष काय? पूर्णांक संख्या भागाकारामध्ये 'अ' या प्रकारचे गुणधर्म पाळत नाहीत का?



सरावासाठी

कोणतेही पाच पूर्णांक संख्येच्या जोड्या घ्या व भागाकार करून तपासून पाहा.

(ii) संघटनांचे गुणधर्म

आपण जाणतो की, भागाकारात पूर्णसंख्या असल्याप्रकारचे गुणधर्म पाळत नाही. तपासून पाहा की, पूर्णांकसुद्धा अशाच प्रकारे ते तुम्हास पुढील बाबी वरून लक्षात येते. $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$.

$(-9) \div 3$ आणि $3 \div (-9)$ हे समान आहेत का?

$(-30) \div (6)$ आणि $(-6) \div (-30)$ हे समान आहेत का?

म्हणून आपण सांगू शकतो की, भागाकारात संघटनाचे गुणधर्म पाळल्या जात नाही.

सरावासाठी

कोणतेही पाच पूर्णांक संखेच्या जोड्या घ्या व भागाकार करून तपासून पाहा.

(iii) 0 चा भागाकार

कोणत्याही पूर्णांकास शून्य ह्या संख्येने भागल्यास भागाकार शून्य येते.

कोणताही पूर्णांक a, $a \div 0$ निश्चित नाही परंतु $a \neq 0$ साठी $0 \div a = 0$.

(iv) भागाकाराची ओळख

जेव्हा आपण एखाद्या पूर्ण संख्येस 1 संख्येने भागल्या जाते तेव्हा भागाकार तेवढाच येतो. हे ऋण संख्येसाठीसुद्धा असू शकते काय हे तपासून पाहा.

खालील उदाहरणाचे निरीक्षण करा

$(-8) \div 1 = (-8)$ $\quad (11) \div 1 = +11$ $\quad (-13) \div 1 =$ _____ $\quad (-25) \div 1 =$ ________

अशा प्रकारे ऋण पूर्णांकास व धनपूर्णांकास 1 या संख्येने भागल्यास भागाकार तेवढाच येतो.

1 हा पूर्णांकाच्या भागाकाराची ओळख आहे.

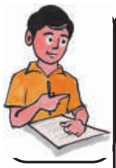
सामान्यतः कोणताही पूर्णांक a, $a \div 1 = a$.

कोणत्याही पूर्णांकास −1 या संख्येने भागल्यास काय होईल?

खालील तक्ता पूर्ण करा.

$(-8) \div (-1) = 8$ $\quad 11 \div (-1) = -11$ $\quad 13 \div (-1) =$ _____ $\quad (-25) \div (-1) =$ _____

यावरून आपण असे म्हणू शकतो की, कोणत्याही पूर्णांकास −1 ने भागल्यास तोच पूर्णांक मिळत नाही; परंतु भागाकार मात्र तेवढाच येतो.



सोडवा

1. जर a हा पूर्णांक असेल तर,

(i) $a \div 1 = 1$?

(ii) $a \div (-1) = -a$?

a साठी विविध संख्येचा वापर करून उदाहरणे तपासा.

(iii) साह्चर्यचे गुणधर्म

जर $[(-16) \div 41] \div (-2) = (-16) \div [4 \div (-2)]$?

$[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

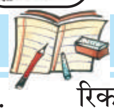
$(-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

म्हणून $[(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

कोणत्याही पूर्णांकात भागाकारात संघटन नसते.

सरावासाठी

कोणतेही पाच पूर्णांक घ्या व पासून पाहा की ते पूर्णांक संघटनाचे गुणधर्म पाळतात काय?



स्वाध्याय 6

1. रिकाम्या जागा पूर्ण करा

(i) $-25 \div$ .... = 25

(ii) .... $\div 1 = -49$

(iii) $50 \div 0$ = ...

(iv) $0 \div 1$ = ...

1.3 काही प्रात्यक्षिकांचे उदाहरणे ज्यात ऋण पूर्णांकाचा वापर केला आहे.

उदाहरण 1 : एका चाचणी परीक्षेत योग्य उत्तरासाठी +5 गुण, चुकीच्या उत्तरासाठी –2 गुण दिले आहेत. (i) राधिकाने सर्व प्रश्न सोडविले आणि 30 गुण मिळविले त्यात दहा प्रश्नांची उत्तरी बरोबर होती. (ii) जयानेही सर्व प्रश्न सोडविले परंतु तिला –12 गुण मिळाले. त्यात चार प्रश्नांची उत्तरे बरोबर होती, तर दोघींचे सरासरी उत्तरे किती बरोबर असतील.

उकल : (i) एका योग्य उत्तरासाठी असलेले गुण $= 5$

म्हणून दहा योग्य उत्तरासाठी मिळालेले गुण $= 5 \times 10 = 50$

राधिकाचे एकूण गुण $= 30$

चुकीच्या उत्तरांना मिळालेले गुण $= 30 - 50 = -20$

एका चुकीच्या उत्तरास असलेले गुण $= (-2)$

म्हणून चुकीच्या उत्तरांची संख्या $= (-20) \div (-2) = 10$

(ii) चार योग्य उत्तरासाठीचे प्राप्त गुण $= 5 \times 4 = 20$

जयाचे एकूण गुण $= -12$

चुकीच्या उत्तरासाठी मिळालेले एकूण गुण $= -12 - 20 = -32$

एका चुकीच्या उत्तरासाठी असलेले गुण $= (-2)$

म्हणून चुकीच्या उत्तरांची एकूण संख्या $= (-32) \div (-2) = 16$

उदाहरण 2 : एका दुकानादारास एक पेन विकल्यावर ₹ 1 नफा मिळतो तर एक पेन्सील विकल्यावर 40 पैसेतोटा होतो. खालील उदाहरण सोडवा.

(i) एका महिन्यात एका दुकानदारास ₹ 5 तोटा झाला. त्या महिन्यात त्याने 45 पेना विकल्या होत्या. तर त्याने त्याच कालावधीत किती पेन्सीली विकल्या ?

(ii) दुसऱ्या महिन्यात तिने नफाही मिळविला नाही, तोटाही झाला नाही. जर तिने 70 पेना विकल्या असतील तर तिने किती पेन्सीली विकल्या असतील?

उकल : (i) एका पेनमधून मिळणारा नफा ₹ 1

45 पेना विकल्यावर मिळणारा नफा = ₹ 45, हे आपण 45 ने दाखवतो.

दिलेला एकूण तोटा = ₹ 5, जो आपण –5 ने दाखवतो.

मिळालेला नफा + झालेला तोटा = एकूण तोटा

म्हणून झालेला तोटा = एकूण तोटा – मिळालेला नफा

$= -5 - (45) = (-50) = -$ ₹ 50 $= -$ 5000 पैसे

1 पेन्सील विक्रीतून झालेला तोटा = 40 पैसे हे आपण –40 असे लिहितो.

म्हणून एकूण विकलेल्या पेन्सिली $= (-5000) \div (-40) = 125$ पेन्सिली

(ii) दुसऱ्या महिन्यात ना नफा ना तोटा

म्हणून मिळालेला नफा + झालेला तोटा = 0

म्हणजे झालेला नफा = – झालेला तोटा

अता 70 पेन विकल्यानंतर झालेला नफा = ₹ 70

म्हणून पेन्सिली विकून झालेला तोटा = – ₹ 70 किंवा –7000 पैसे.

म्हणून एकूण विकलेल्या पेन्सिली $= (-7000) \div (-40) = 175$ पेन्सिली

स्वाध्याय 7

1. वर्गाचाचणीत 15 प्रश्न दिले आहेत. प्रत्येक बरोबर उत्तरासाठी 4 गुण तर चुकीच्या उत्तरासाठी –2 गुण आहेत. (i) भारतीने सर्व प्रश्न सोडविले केवळ 9 प्रश्नांचीच उत्तरे बरोबर होती. तर तिला किती गुण प्राप्त झाले. (ii) तिची एक मैत्रीण हेमाने फक्त 5 प्रश्न सोडविले आणि ते सर्व बरोबर होते, तर तिला एकूण किती गुण प्राप्त झाले आहेत.

2. एका सिमेंट कंपनीला पांढरे सिमेंट विकून एका पोत्यामागे ₹9 फायदा झाला तर साधारण सिमेंट पोत्याच्या विक्रीमागे ₹5 तोटा झाला.

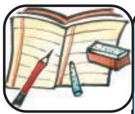
(i) कंपनीची विक्री 7000 पोते पांढरे सिमेंट व 6000 पोते साधारण सिमेंट एवढी झाली तर नफा व तोटा काढा.

(ii) ना नफा ना तोटा अशा तत्वावर 5400 पोते साधारण सिमेंटचे विकले तर पांढरे सिमेंट किती विकले असतील?

3. दुपारचे 12 वाजता तापमान 10^0 से. 0^0 च्या वर असेल. जर तासी तेच तापमान 2^0 ने मध्यरात्रीपर्यंत कमी होत गेले तर 8^0 तापमान होण्यासाठी किती वेळ लागेल? 0^0 पेक्षा कमी तर मध्यरात्रीचे तापमान किती असेल?

4. एका वर्गाचाचणीत योग्य उत्तरासाठी +3 गुण तर चुकीच्या उत्तरासाठी –2 गुण देण्यात आले होते. तर प्रश्न न सोडविल्यास शून्य गुण देण्यात आले होते. (i) राधिकाने या चाचणीत एकूण 20 गुण मिळविले त्यापैकी तिची जर 12 उत्तरे बरोबर असतील तर तिने एकूण किती प्रश्न चुकीची सोडविली असतील? (ii) मोहिनीने त्याच चाचणी परीक्षेत –5 गुण मिळविले तथापि तिची सात उत्तरे बरोबर होती. तर तिने एकूण किती प्रश्न सोडविले?

5. एक यंत्र प्रतिमिनिट 6 मीटर वेगाने जमिनीत उतरते. जर 10 मीटर उंच वर असेल तर –350 मीटरवर पोहोचायला किती वेळ लागेल?



पाठ्यावलोकन

1. **N** (नैसर्गिक संख्या) = 1, 2, 3, 4, 5 . . .

   W (पूर्ण संख्या) = 0, 1, 2, 3, 4, 5 . . .

   Z (पूर्णांक संख्या) = ..., –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4 . . .

   आणि 0, ±1, ±2, ±3 (पूर्णांकाचा संच I दाखवू शकतो..)

2. (i) प्रत्येक वेळी जर धन पूर्णांक मिळविला तर संख्या रेषा उजवीकडे वाढते.

   (ii) प्रत्येक वेळी जर ऋण पूर्णांक मिळविला तर संख्या रेषा डावीकडे वाढते.

3. (i) प्रत्येक वेळी जर धन पूर्णांक वजा केला तर संख्या रेषा डावीकडे वाढते.

   (ii) प्रत्येक वेळी जर ऋण पूर्णांक वजा केला तर संख्या रेषा उजवीकडे वाढते.

4. (i) प्रत्येक वेळी जर ऋण पूर्णांक हा धन पूर्णांकाशी किंवा धन पूर्णांक हा ऋण पूर्णांकाशी गुणला तर गुणाकार ऋण येतो.

   (ii) दोन ऋण पूर्णांक संख्येचा गुणाकार धन पूर्णांक येतो.

   (iii) ऋणपूर्णांक संख्येचा समवेळा केलेला गुणाकार धनपूर्णांक येतो. तर विषम वेळा केलेला गुणाकार ऋणसंख्या येतो.

5. (1) प्रत्येक वेळी तुम्ही कोणत्याही ऋण पूर्णांकास धन पूर्णांकाने भागल्यास येणारे उत्तर हे ऋण पूर्णांकात असते.

(2) प्रत्येक वेळी तुम्ही कोणत्याही धन पूर्णांकास ऋण पूर्णांकाने भागल्यास येणारे उत्तर हे धन पूर्णांकात असते.

(3) एकाच किंमतीच्या कोणत्याही दोन पूर्णांकाचा भागाकार किंव गुणाकार केल्यास येणारे उत्तर हे धन असते. तथापि ते उत्तरांमध्ये ऋण असायला हवे.

6. खालील उदाहरणांचा अभ्यास करा.

(1) पूर्णांक हे संवृत्त असतात म्हणजेच, र + ल आणि रद्वल हे पूर्णांक आहेत. ज्यात र आणि ल हे कोणतेही वेगळे पूर्णांक आहेत.

(2) बेरीज ही सहगुणक प्रक्रिया आहे. म्हणजेच र + ल = ल + र, र आणि ल सर्व पूर्णांकासाठी.

(3) बेरीज संघटनात्मक प्रक्रिया आहे. म्हणजेच (र+ल) + ल = र + (ल + ल), र, ल आणि ल सर्व पूर्णांकासाठी.

(4) पूर्णांक शून्य हा अविकारक घटक आहे. म्हणजेच र + 0 = 0 + र = र, र हा कोणताही पूर्णांक आहे.

7. गुणाकारास पूर्णांक सारखेच बदल दर्शवितात.

(1) पूर्णांक हे बंद संवृत्त आहेत. म्हणजेच, र द्व ल कोणत्याही दोन पूर्णांक जसे र आणि ल.

(2) पूर्णांकाचा गुणाकार हा **क्रमनिरपेक्ष** असतो. म्हणजेच, र द्व ल = ल द्व र कोणत्याही पूर्णांकासाठी जसे र आणि ल.

(3) 1 हा गुणाकार अविकारक घटक असून कोणत्याही पूर्णांकासाठी , 1 द्व र = र द्व 1 = र, र कोणताही पूर्णांक.

(4) पूर्णांकाचा गुणाकार संघटनात्मक असतो. म्हणजेच (रद्वल) द्व ल = र द्व (लद्वल) कोणतेही तीन पूर्णांक जसे र, ल, आणि ल.

8. पूर्णांकात बेरजेच्या वितरणाचे गुणधर्म म्हणजेच र द्व (ल+ल) = र द्वल + र द्व ल कोणत्याही तीन पूर्णांकासाठी जसे र, ल आणि ल. यालाच वितरणाचा गुणधर्म म्हणतात.

9. पूर्णांकाच्या वजाबाकीच्या सहसंबंधात बेरीज, गुणाकार व भागाकार या संज्ञा वजाबाकीच्या सहसंबंधात गणित करताना लक्षात घेणे महत्त्वाचे असते.

10. कोणत्याही पूर्णांकासाठी a, आपण

(1) $a \div 0$ चा विचार करत नाही किंवा ते अर्थहीन असते.

(2) $0 \div a = 0$ $\quad (a\ {}^{1}\ 0$ करिता)

(3) $a \div 1 = a$

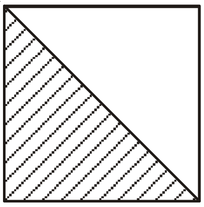
अपूर्णांक, दशांश अपूर्णांक आणि परिमेय संख्या

2

2.0 उजळणी :

आपल्या रोजच्या जीवनात अशी अनेक उदाहरणे आहेत. जिथे आपण अपूर्णांकाचा वापर करतो. त्यांना आठवण्याचा प्रयत्न करा. मागील इयत्तेत आपण छेदाधिक आणि अशाधिक अपूर्णांक आणि त्यांची बेरीज व वजाबाकी कशी करावी (दर्शवावी) हे शिकलो आपण पूर्वी काय शिकलो याचे अवलोकन करू. आणि नंतर अपूर्णांक संख्याचा गुणाकार, भागाकार शिकू. तसेच दशांश अपूर्णांकाकडे वळूया. मोठ्या संख्याच्या संचाने म्हणजेच परिमेय संख्याच्या परिचयाने आपण समाप्ती करूया.

अपूर्णांकाचा वापर करून खालील आकृत्यांचे छायांकित भाग दर्शविलेले आहेत. दाखविलेले भाग योग्य आहेत का?

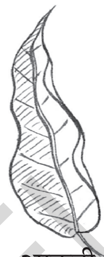


आकृती 1

$\frac{1}{2}$

हो/ना

कारण ....

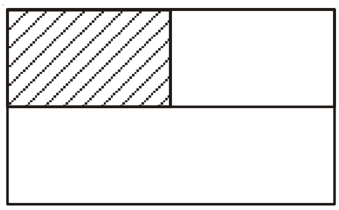


आकृती 2

$\frac{1}{2}$

हो/ना

कारण ....



आकृती 3

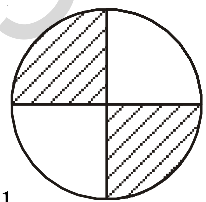
$\frac{1}{3}$

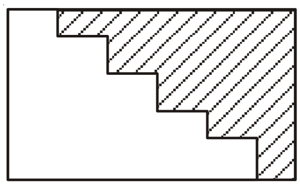
हो/ना

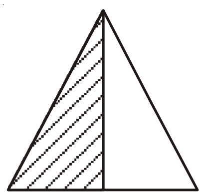
कारण ....

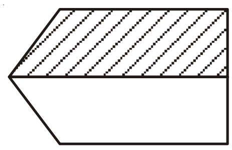
वरिल बाबीचा विचार करता आपल्याला हे लक्षात ठेवावे लागेल की प्रत्येक आकृतीचे भाग सारखेच आहेत. किंवा नाही. अशीच आणखी पाच उदाहरणे तयार करा. आणि आपल्या मित्राला तपासण्यासाठी द्या.

येथे नेहाने $\frac{1}{2}$ चे वेगवेगळ्या आकृत्यामधील प्रतिनिधित्व दाखविले आहे.









$\frac{1}{2}$ ने छायांकित भाग अचूक पणे दाखविलेले आहेत असे तुम्हाला वाटते का? तेव्हा छायांकित नसलेल्या भागाने कोणता अपूर्णांक दाखविलेला आहे.

सरावासाठी

$\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ हे वेगवेगळ्या आकृत्यांच्या सहायाने दाखवा. तुम्ही दाखविलेला भाग योग्य कसा ते सिध्द करा. तुमच्या मित्राला सहभागी करा. त्यांच्या मदतीने तपासा.

छेदादिक आणि अशांधिक अपुर्णांक

तुमच्या छेदाधिक आणि अंशाधिक अपुर्णांकाविशयी शिकला आहात छेदादिक अपुर्णांक हा संपूर्ण भागाचा एक भाग दर्शवितो. छेदादिक अपुर्णांकाची पाच उदाहरणे द्या.

$\frac{3}{2}$ छेदादिक अपुर्णांकाचे गुणधर्म काय आहेत?

त्यापैकी एक म्हणजे अंशाधिक अपुर्णांकात अंश हा छेदापेक्षा मोठा किंवा छेदा एवढा असतो.

अशा अपुर्णाकांविषयी तुम्हाला आणखी काय माहिती आहे?

आपण असे म्हणू शकतो की सर्व अंशाधिक अपुर्णांक पुर्णांकयुक्त अपुर्णांकात लिहु शकतो. $\frac{3}{2}$ व्यक्त करू शकतो.

$1\frac{1}{2}$ हा अंशाधिक अपुर्णांक असा ही लिहता येते. हा पुर्णांक युक्त अपुर्णांक आहेया मध्ये एका पुर्णाक युक्त आणि एका अपुर्णांकयुक्त भागाचा समावेश आहे.अपुर्णांकायुक्त भागात मात्र छेदादिक असायला हवा.

सरावासाठी

1. छेदादीक ,अंशाधिक आणि पूर्णांयुक्त अपूर्णांकाची प्रत्येकी पाच उदाहरणे लिहा.

सरावासाठी

आकृतीच्या सहायाने $2\frac{1}{4}$ दाखवा हे दाखविण्यासाठी किती एककांची गरज भासेल.

अपुर्णांकाची तुलना (लहानमोठेपणा)

समछेद अपुर्णांकाची तुलना कशी करतात हे तुम्हाला आठवते का?

उदा:- $\frac{1}{5}$ आणि $\frac{3}{5}$? $\frac{3}{5}$ हे $\frac{1}{5}$ पेक्षा मोठे आहेत का?

दोन भिन्नछेद अपूर्णांकाची तुलना कशी करतात हे आवठवते का ?

उदा :- $\frac{5}{7}$ आणि $\frac{3}{4}$?

प्रथम आपण त्यांचे समछेद अपूर्णांकात रूपांतर करून घेऊ आणि नंतर तुलनाकरू

$\frac{5}{7} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{28}$ आणि $\frac{3}{4} \times \frac{7}{7} = \frac{21}{28}$

तेव्हा $\frac{5}{7} = \frac{20}{28}$ आणि $\frac{3}{4} = \frac{21}{28}$

अशाप्रकारे $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$

सोडवा

1. $\frac{3}{5}, .\frac{4}{7}$ साठी पाच सममूल्य अपूर्णांक काढा.

2. $\frac{5}{8}$ आणि $\frac{3}{5}$ यापैकी मोठा अपूर्णांक कोणता ?

3. खालील जोडया सरळरूपात लिहुन त्या समान आहेत का ते ठरवा.

   (i) $\frac{3}{8}$ आणि $\frac{375}{1000}$ (ii) $\frac{18}{54}$ आणि $\frac{23}{69}$

   (iii) $\frac{6}{10}$ आणि $\frac{600}{1000}$ (iv) $\frac{17}{27}$ आणि $\frac{25}{45}$

आपण इयत्ता सहावीमध्ये अपूर्णांकाची बेरीज आणि वजाबाकी शिकलो. आता आपण काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. 1 : रझियाने तिच्या गृहपाठाच्या $\frac{3}{7}$ भाग पूर्ण केला तर रेखाने तिच्या गृहपाठाच्या $\frac{4}{9}$ भाग पूर्ण केला तर कमीत कमी गृहपाठाचा भाग कोणी पूर्ण केला ?

उकल : हे शोधण्यासाठी आपण $\frac{3}{7}$ आणि $\frac{4}{9}$ यांची तुलना करू.

प्रथम त्यांचे छेद समान करून $.\frac{3}{7} = \frac{27}{63} ; \frac{4}{9} = \frac{28}{63}$

$\frac{27}{63} < \frac{28}{63}$

अशाप्रकारे $\frac{27}{63} < \frac{28}{63}$ आणि म्हणून $\frac{3}{7} < \frac{4}{9}$

रझियाने तिच्या गृहपाठाच्या रेखापेक्षा कमी भाग पूर्ण केला.

उदा.2 : शंकरच्या कुटुंबाने महिन्याच्या पहिल्या 15 दिवसांत $3\frac{1}{2}$ कि.ग्रॅ. साखर वापरली तर पुढील 15 दिवसांसाठी $3\frac{3}{4}$ साखरेचा वापर केला. तर संपूर्ण महिनाभरात त्यांनी किती साखर वापरली ?

उकल : संपूर्ण महिनाभरासाठी साखरेचे एकूण वजन

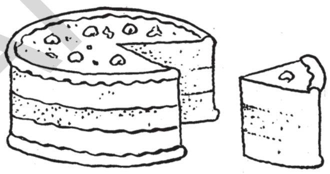
$= \left(3\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4}\right)$ कि.ग्रॅ.

$= \left(\frac{7}{2} + \frac{15}{4}\right)$ कि.ग्रॅ. $= \left(\frac{7x2}{2x2} + \frac{15}{4}\right)$ कि.ग्रॅ. $= \left(\frac{7x2}{2x2} + \frac{15}{4}\right)$ कि.ग्रॅ.

$= \frac{29}{4}$ कि.ग्रॅ. $= 7\frac{1}{4}$ कि.ग्रॅ..

उदा. 3 : अहमदच्या वाढदिवसाच्या मेजवानीत संपूर्ण केकचा $\frac{5}{7}$ भाग वाटला गेला होता तर किती केक शिल्लक राहीला ?

उकल : संपूर्ण केक 1 किंवा $\frac{1}{1}$ आहे.



वाटलेला केक $= 1 - \frac{5}{7}$

$= \frac{7}{7} - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$

अशाप्रकारे संपूर्ण केकचा $\frac{2}{7}$ भाग शिल्लक राहिला.

स्वाध्याय 1

1. खालील उदाहरणे सोडवा.

(i) $2 + \frac{3}{4}$ (ii) $\frac{7}{9} + \frac{1}{3}$ (iii) $1 - \frac{4}{7}$

(iv) $2\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ (v) $\frac{5}{8} - \frac{1}{6}$ (vi) $2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$

2. खालील अपूर्णांक चढत्या क्रमाने लिहा.

(i) $\frac{5}{8}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}$

3. खालील चौरसातील प्रत्येक ओळीतील प्रत्येक स्तंभातील आणि कर्णाच्या बाजूतील संख्याची बेरीज समान आहे का ते तपासा.

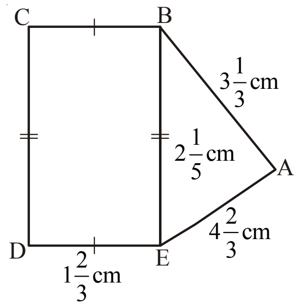
$\frac{6}{13}$	$\frac{13}{13}$	$\frac{2}{13}$
$\frac{3}{13}$	$\frac{7}{13}$	$\frac{11}{13}$
$\frac{12}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{8}{13}$

(4) एका आयताकृतीं कागदाच्या शीटची लांबी $5\frac{2}{3}$ से.मी. आणि रूंदी $3\frac{1}{5}$ सें.मी. आहे. तर त्याची परिमिती किती ?

(5) पाककलेसाठी $3\frac{1}{4}$ कप पीठ हवे आहे राधाकडे $1\frac{3}{8}$ कप पीठ आहे तर तिला आणखी किती कप पिठाची आवश्यकता आहे?

(6) अब्दुल वार्षिक परीक्षेचा अभ्यास करत आहे त्याने त्याच्या अभ्यासक्रमात $\frac{5}{12}$ भाग पूर्ण केलेला आहे तर त्याचा किती अभ्यासक्रम शिल्लक आहे ?

(7) खालील आकृतीतील (i) ΔABE (ii) आयत BCDE परिमिती किती? कोणत्या आकृतीची परिमिती जास्त आहे आणि किती ?



2.1 अपूर्णांकाचा गुणाकार

2.1.1 अपूर्णांकाला पूर्ण संख्येने गुणने

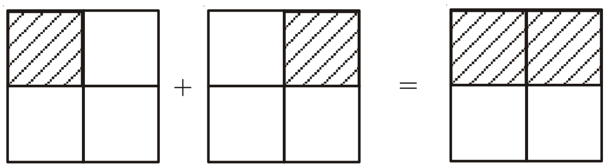
जेव्हा आपण पूर्ण संख्यांना गुणतो तेव्हा आपण पुन्हा पुन्हा ती संख्या मिळवित असतो हे आपणास माहित आहे.

उदा.5 ह्व 4 म्हणजेच 4 चे प्रत्येकी 5 गट किंवा 5 वेळा 4

तसेच $2\times\frac{1}{4}$ म्हणजेच $\frac{1}{4}$ ची दोनदा बेरीज किंवा $\frac{1}{4}$ दोन वेळा

हे आपण आकृतीच्या सहायाने दाखवू. आकृती 1 कडे बघा प्रत्येक छायांकित भाग हा एका चौरसाच्या $\frac{1}{4}$ आहे.

दोन छायांकित भाग एकत्र $2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$. असे दाखवतील



आकृती 1 आकृती 2

आता आपण $3\times\frac{1}{2}$ शोधू. याचा अर्थ $\frac{1}{2}$ तीन वेळा तीन अर्धे

आपणास $3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

हे करा

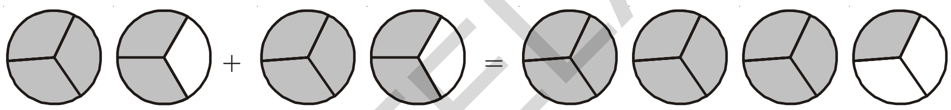
1. शोधा (i) $4\times\frac{2}{7}$ (ii) $4\times\frac{3}{5}$ (iii) $7\times\frac{1}{3}$

आतापर्यंत आपण लक्षात घेतलेले अपूर्णांक जसे $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{7}$ आणि $\frac{3}{5}$ हे छेदादिक अपूर्णांक बघू.

आता काही असामान्य दशांश अपूर्णांक जसे $\frac{5}{3}$ आणि त्याचा गुणाकार $2\times\frac{5}{3}$

$$2\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}+\frac{5}{3} = \frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$$

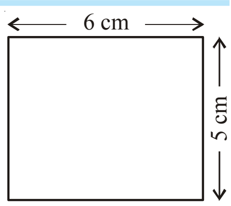
आकृतीव्दारे



$\frac{5}{3}$ + $\frac{5}{3}$ = $=3\frac{1}{3}=3\frac{1}{3}$

हे करा

1. शोधा (i) $5\times\frac{3}{2}$ (ii) $4\times\frac{7}{5}$ (iii) $7\times\frac{8}{3}$

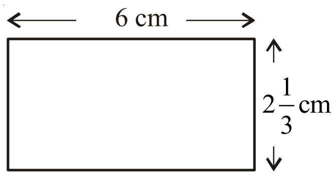


आयताचे क्षेत्रफळ हे लांबी ह्न रूंदी एवढे असते हे आपणास माहित आहे. जर एका आयताची लांबी आणि रूंदी अनुक्रमे 6 सें.मी. आणि 5 सें.मी. असेल त्याचे क्षेत्रफळ किती ? अर्थातच, क्षेत्रफळ 6 ह्न 5 = 30 से.मी.^{2}

जर एका आयताची लांबी , रूंदी अनुक्रमे 6 सें.मी. आणि $2\frac{1}{3}$ सें.मी असेल तर त्याचे क्षेत्रफळ किती ?

आयताचे क्षेत्रफळ हे त्यांच्या लांबी रूंदीच्या गुणाकाराएवढे असते.

पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकाला पूर्ण संख्येने गुणण्या अगोदर पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकाचे अंशाधिक अपूर्णांकात रूपांतर करून घ्यावे व नंतर गुणाकार करावा.



म्हणून आयताचे क्षेत्रफळ $= 6 \times 2\frac{1}{3}$

$= 6 \times \frac{7}{3} = \frac{42}{3}\ cm^2 = 14 cm^2$

आतापर्यंत तुमच्या लक्षात आले असेल की, पूर्णांक संख्येने छेदादिक अथवा अंशाधिक अपूर्णांकाला गुणतांना आपण पूर्णांकाने अशाला गुणतो आणि छेद तसाच राहू देतो.

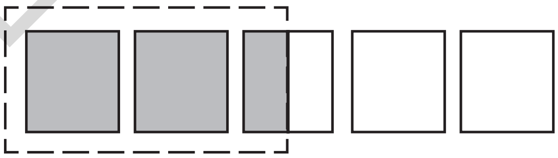
हे करा

1. किंमती शोधा (i) $3 \times 2\frac{2}{7}$ (ii) $5 \times 2\frac{1}{3}$ (iii) $8 \times 4\frac{1}{7}$ (iv) $4 \times 1\frac{2}{9}$ (v) $5 \times 1\frac{1}{3}$

2. आकृतीच्या सहायाने दाखवा. $2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

समजा $\frac{1}{2} \times 5$. हे तुम्हाला कसे समजले ?

$\frac{1}{2} \times 5$ म्हणजेच 5 वेळा निम्मे जे की $\frac{5}{2}$ किंवा $2\frac{1}{2}$



अशाप्रकारे 5 **चे** $\frac{1}{2}$ $5 = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$

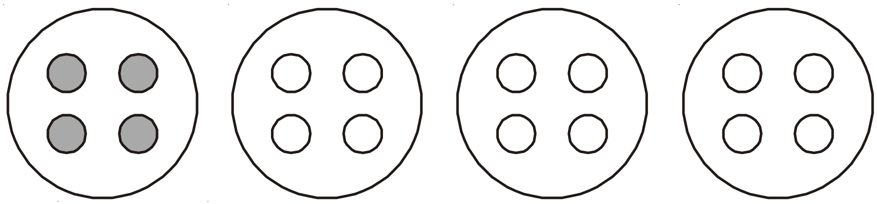
तसेच 3 चा $= \frac{1}{2}$ $3 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$ किंवा $1\frac{1}{2}$

येथे चा, ची , चे म्हणजे गुणाकार

16 चा $\frac{1}{4}$ किती ? येथे आपल्याला 16 चे 4 समान भागात विभाजन करून त्यापैकी एक भाग घ्यावा लागेल

जेव्हा आपण 16 चे 4 समान भाग बनवितो तेव्हा प्रत्येंक समान हा 4 होईल. म्हणून $\frac{1}{4}$ भाग म्हणजेच 16 चा 4 था भाग होय.

याचे स्पष्टीकरण गोट्यांच्या साह्याने देता येईल.



16 चा $\frac{1}{4}$ किंवा $\frac{1}{4} \times 16 = \frac{16}{4} = 4$

तसेच 16 चा $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8$.

उदाहरण 4 : नाझियाकडे 20 गोट्या आहेत रेशमाकडे नाझियाकडे असलेल्या गोट्यांच्या $\frac{1}{5}$ गोट्या आहेत तर रेशमाकडे किती गोट्या आहेत?

उकल : रेशमाकडे $\frac{1}{5} \times 20 = 4$ गोट्या

उदाहरण 5 : उदा.5 – चार व्यक्ती असलेल्या एका कुटुंबात एका दिवशी 15 चपात्या खाल्ल्या जातात आईने $\frac{1}{5}$ चपात्या खाल्ल्या आणि मुलांनी $\frac{3}{5}$ चपात्या खाल्ल्या व उरलेल्या चपात्या वडिलांनी खाल्ल्या तर –

1) आईने किती चपात्या खाल्ल्या ?

2) मुलांनी किती चपात्या खाल्ल्या ?

3) वडिलांनी एकुण चपात्यांच्य किती भाग चपात्या खाल्ल्या ?

उकल : एकुण चपात्यांची संख्या = 15

1) आईने खाल्लेल्या चपात्यांची संख्या $\frac{1}{5} \times 15 = 3$ चपात्या

2) एकुण चपात्यापैकी $\frac{3}{5}$ चपात्या मुलांनी खाल्ल्या $\frac{3}{5} \times 15 = 9$ चपात्या

3) वडिलांकरिता शिल्लक चपात्या $= 15 - 3 - 9 = 3$ चपात्या

वडिलांकडून खाल्ल्या गेलेल्या चपात्यांच्या भाग $= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

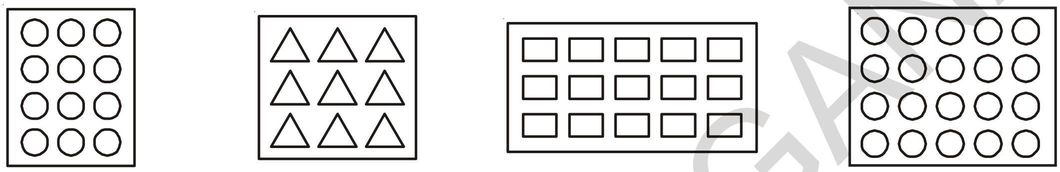
स्वाध्याय 2

1. खालील गुणाकार करून पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकात उत्तर लिहा.

(i) $\frac{3}{6}\times 10$ (ii) $\frac{1}{3}\times 4$ (iii) $\frac{6}{7}\times 2$ (iv) $\frac{2}{9}\times 5$ (v) $15\times\frac{2}{5}$

2. रंगवा : (i) आकृती (a) मधील चौकटीतील $\frac{1}{2}$ भाग (ii) आकृती (b) मधील चौकटीतील $\frac{2}{3}$ भाग

(iii) आकृती (c) मधील चौकटीतील $\frac{3}{5}$ भाग (iv) आकृती (d) मधील चौकटीतील $\frac{3}{4}$ भाग



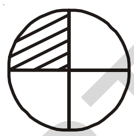
(a) (b) (c) (d)

3. शोधा (i) $\frac{1}{3}$ of 12 (ii) $\frac{2}{5}$ of 15

2.1.2 अपूर्णांकाला अपूर्णांकाने गूणने

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$ म्हणजे काय ? वरील माहितीवरून आपण असे म्हणू शकतो की याचा अर्थ $\frac{1}{2}$ चा $\frac{1}{4}$.

लक्षात घ्या $\frac{1}{4}$ -



हया छायांकित भागाचा $\frac{1}{2}$ भाग आपण कसा शोधाल ?

आपण या $\left(\frac{1}{4}\right)$ छायांकित भागाचे दोन समान भागात विभाजन करू

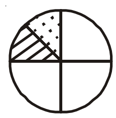


Figure 1

आकृती 1 पहा या दोन भागापैकी प्रत्येक भाग $\frac{1}{4}$ चा $\frac{1}{2}$ भाग दाखवितो

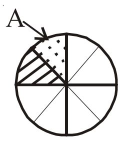


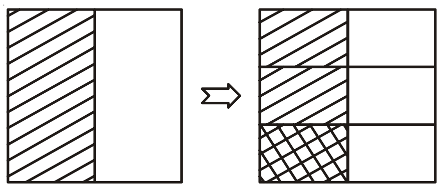
Figure 2

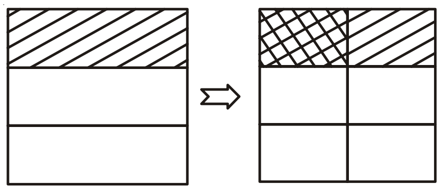
आपण यापैकी एका भागाला ‘A’ असे संबोधू. संपूर्ण वर्तुळाच्या ‘A’ हे किती भाग आहे ? जर आपण वर्तुळाच्या उर्वरित प्रत्येक भागाचे दोन समान भागात विभाजन केले तर आपणास एकूण आठ समान भाग मिळतील ‘A’ हा सुध्दा त्यांच्यापैकीत एक आहे.

संपूर्ण वर्तुळाच्या ‘A’ हा $\frac{1}{8}$ आहे.

अशाप्रकारे $\frac{1}{4}$ of $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

शोधा $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ आणि $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$.

$\frac{1}{2}$ चा $\frac{1}{3}$ चा $\frac{1}{3}$ चा  $= \frac{1}{6}$ अशाप्रकारे $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}$ चा $\frac{1}{2}$ चा $\frac{1}{2}$ चा  $= \frac{1}{6}$ अशाप्रकारे $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

आपल्याला असे आढळून येईल $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

सरावासाठी

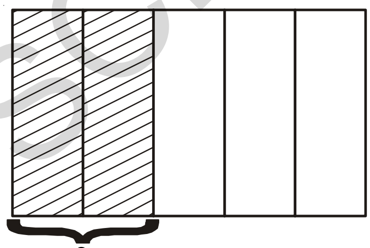
1. चौकटीत योग्य उत्तर लिहा :

(i) $\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{1\times1}{5\times7}=\boxed{}$ (ii) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\boxed{}=\boxed{}$

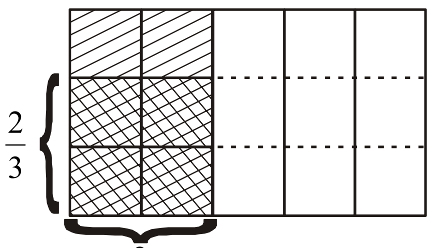
2. शोधा $\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$ आणि $\frac{9}{3}\times\frac{5}{5}$ यांच्या किमती शोधा आकृतीच्या सहायाने $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}$ हे तपासा.

3. $\frac{9}{3}\times\frac{5}{5}$ आकृती काढून पडताळा?

आणखी एक उदाहरण विचारात घेऊ $\frac{2}{5}$ चा $\frac{2}{3}$ आपण आकृती 1 मध्ये $\frac{2}{5}$ आणि आकृती 2 मध्ये $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}$ दाखविले आहे.



$\frac{2}{5}$ आकृती 1



$\frac{2}{5}$ आकृती 2

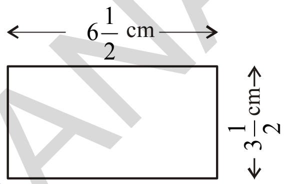
आकृती 2 मधील तिरप्या दुहेरी रेषा असलेला भाग आपणास $\frac{2}{5}$ चा $\frac{2}{3}$ किंवा $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ हे दाखवितो.

$\frac{2}{5}$ चा $\frac{2}{3}$ शोधण्यासाठी आपण $\frac{2}{5}$ चे तीन समान भाग केले आणि 3 पैकी 2 भाग घेतले.

म्हणजेच एकूण 15 भागापैकी 4 भाग $\frac{2}{5}$ of $\frac{2}{3}$ $= \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

येथे आपल्या लक्षात आले असेल की, दोन अपूर्णांकाचा गुणाकार $=$ $\frac{\text{अंशाचा गुणाकार}}{\text{छेदाचा गुणाकार}}$

जर एका आयताची लांबी आणि रूंदी अनुक्रमे $6\frac{1}{2}$ सें.मी. आणि $3\frac{1}{2}$ सें.मी.^{2} असेल तर त्याचे क्षेत्रफळ किती ?



आयताचे क्षेत्रफळ $= 6\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = \frac{13}{2} \times \frac{7}{2}$ सें.मी.^{2}. $= = \frac{91}{4} = 22\frac{3}{4} \text{cm}^2$

उदाहरण 6 : नरेंद्र 1 तासात $\frac{1}{4}$ कादंबरी वाचतो. तर $2\frac{1}{2}$ तासात तो कादंबरीचा किती भाग वाचेल ?

उकल : 1 तासात नरेंद्रने वाचलेला कादंबरीचा भाग $= \frac{1}{4}$

म्हणून $2\frac{1}{2}$ तासात वाचलेला कादंबरीचा भाग $= 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ $= \frac{5}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

म्हणून $2\frac{1}{2}$ तासात कादंबरीचा $\frac{5}{8}$ भाग वाचेल.

उदाहरण 7 : एका पोहण्याच्या तलावाचा $\frac{3}{10}$ भाग अर्ध्या तासात भरतो. तर $1\frac{1}{2}$ तासात तो तलाव किती भरेल ?

उकल : अर्ध्या तासात तलावाचा भरलेला भाग $= \frac{3}{10}$.

$1\frac{1}{2}$ तासांत तलावाचा भरणारा भाग हा अर्ध्या तासात भरणाऱ्या भागांच्या तीन पट असेल

$= 3 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

अशाप्रकारे $1\frac{1}{2}$ तलावाचा $\frac{9}{10}$ भाग भरेल.

सरावासाठी

दोन नैसर्गिक संख्याच्या गुणाकार हा एक पेक्षा एका पेक्षा जास्त असून त्या प्रत्येक नैसर्गिक संख्येपेक्षा मोठा असतो. उदा. $3 \times 4 = 12$, $12 > 4$ आणि $12 > 3$. जेव्हा आपण दोन छेदादिक अपूर्णांकाचा गुणाकार करतो तेव्हा त्यांच्या किमतीमध्ये काय बदल होतो ?

खालील सारणी पूर्ण करा आणि तुमचे निरीक्षण नोंदवा.

उदा. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$	$\frac{8}{15} < \frac{2}{3}, \frac{8}{15} < \frac{4}{5}$	गुणाकार हा प्रत्येक अपूर्णांकापेक्षा लहान आहे
$\frac{1}{5} \times \frac{2}{7} =$ ------		
$\frac{3}{5} \times \frac{\square}{2} = \frac{21}{10}$		
$\frac{5}{\square} \times \frac{4}{3} = \frac{20}{6}$		

स्वाध्याय 3

1. खालील प्रत्येकाचा गुणाकार शोधा

(i) $\frac{5}{6} \times \frac{7}{11}$ (ii) $6 \times \frac{1}{5}$ (iii) $2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{5}$

2. गुणाकार करा आणि अतिसंक्षिप्त रूपात लिहा.

(i) $\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{2}{7} \times \frac{1}{3}$ (iii) [illegible] (iv) $\frac{9}{5} \times \frac{10}{3} \times \frac{1}{2}$

3. खालीलपैकी मोठा कोणता ते शोधा.

(i) $\frac{2}{5}$ चा $\frac{4}{7}$ किंवा $\frac{3}{4}$ चा $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ चा $\frac{4}{7}$ किंवा $\frac{2}{3}$ चा $\frac{3}{7}$

4. रेहाना दररोज $2\frac{1}{2}$ तास कशिदाकाम करते. ती सात दिवसात काम पूर्ण करते तर तीने तीचे काम पूर्ण करण्यासाठी किती तास लावले ?

5. 1 ट्रक 1 लिटर पेट्रोल मध्ये 8 किमी धावतो तर $10\frac{2}{3}$ लि. पेट्रोल मध्ये तो किती अंतर पार करेल ?

6. राजा 1 सेकंदात $1\frac{1}{2}$ मि. चालतो. तर तो 15 मि. किती अंतर चालून जाईल ?

7. खालील विधाने खरी ठरण्यासाठी $\square$ योग्य संख्या भरा.

(i) $\frac{2}{3} \times \square = \frac{20}{21}$. (ii) $\frac{5}{7} \times \frac{\square}{5} = \frac{3}{\square}$

2.2 अपूर्णांकाचा भागाकार

कल्पना करा की तुमच्या जवळ 15 लि. लांब कपडा आहे. आणि तुम्हाला त्याचे प्रत्येकी $1\frac{1}{2}$ मी. टुकडे करावयाचे आहेत. तर $1\frac{1}{2}$ मी असे किती तुकडे तुम्हाला मिळतील ?

येथे आपण 15 मि. कापडामधून अनुक्रमे $1\frac{1}{2}$ मी. कापढ कमी करत गेलो तर असे आपण कपडा संपेपर्यंत किती वेळा करू शकू.
दुसऱ्या एका उदाहरणाकडे लक्ष द्या.

एका $\frac{21}{2}$ सें.मी. लांबी असलेल्या कागदाच्या तुकडयाचे प्रत्येकी $\frac{3}{2}$ सेमी एवढया लहान भागात काप घेतले तर आपणास किती भाग मिळतील ?

किंवा $\frac{21}{2}$ ला $\frac{3}{2}$ ने भागू जसे $\frac{21}{2} \div \frac{3}{2}$

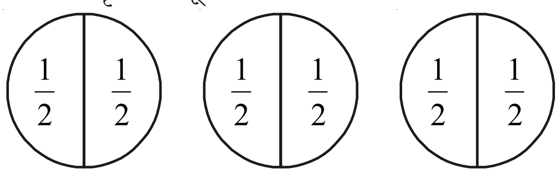
पूर्ण संख्याचा भागाकार थोडा लक्षात घेवूया.
$15 \div 3$ मध्ये आपणास 15 मध्ये किती वेळा 3 मिळतो. उत्तर आहे 5. तसेच 18 या संख्येमध्ये 2 चे किती गट आहेत ? तर आपण $18 \div 2$ करतो तेव्हा उत्तर 9 मिळते.

आता हाच परस्पर संबंध पूर्णांक संख्येला अपूर्णांकाने भागतांना आणि अपूर्णांकाने अपूर्णांकाला भागताना या प्रकियेत वापरतो.

2.2.1 पूर्णांकाला अपूर्णांकाने भागने.

आता शोधूया. $3 \div \frac{1}{2}$. किरण म्हणते की 3 या संख्येमध्ये किती $\left(\frac{1}{2}\right)$ आहेत ?

हे शोधण्यासाठी आपण खालील आकृती काढू.



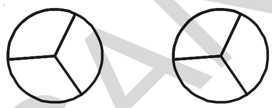
वरील आकृती दर्शविते की 3 या संख्येमध्ये $\frac{1}{2}$ चे 6 गट आहेत.

आपण असे म्हणू शकतो $3 \div \frac{1}{2} = 6$

$2 \div \frac{1}{3}$ चा विचार करा

दोन पूर्णांकामध्ये किती $\left(\frac{1}{3}\right)$ आहेत हे शोधणे तुम्ही हे कसे शोधाल ?

दोन पूर्णांमध्ये सहा वेळा $\left(\frac{1}{3}\right)$ आहेत हे आपणास बघू शकतो किंवा $2 \div \frac{1}{3} = 6$



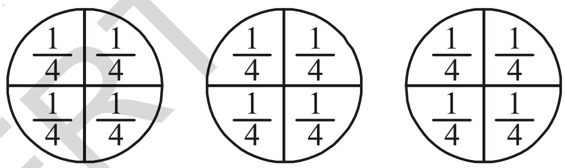
हे करा

शोधा (i) $2 \div \frac{1}{4}$ (ii) $7 \div \frac{1}{2}$ (iii) $3 \div \frac{1}{5}$

2.2.1a) अपूर्णांकाचा गुणाकारव्यस्त

$3 \div \frac{1}{4}$ यावर आता विचार करा.

याचा अर्थ तीन पूर्णांकाचे प्रत्येकी $\frac{1}{4}$ एवढ्या समान भागात विभाजन केल्यास आपणास $\frac{1}{4}$ भाग मिळतात.



आपण असे म्हणू शकतो $3 \div \frac{1}{4} = 12$

$= \quad 3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 12.$

हे आपल्याला दर्शविते की $3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1}$

$2 \div \frac{1}{3}$. चा अभ्यास करा.

आपल्याला अगोदरच माहित आहे की $2 \div \frac{1}{3} = 6$

वरिल उदाहरणाप्रमाणेच $2 \div \frac{1}{3} = 2 \times \frac{3}{1} = 6$

तसेच $4 \div \frac{1}{4} = 16$ आणि $4 \times \frac{4}{1} = 16$.

$\frac{3}{1}$ ही संख्या मिळविण्यासाठी आपण $\frac{1}{3}$ च्या अंश आणि छेद यांची अदलाबदल करू किंवा $\frac{1}{3}$ ची उलट संख्या घेऊ तसेच $\frac{1}{4}$.ची उलट संख्या घेतल्यास $\frac{4}{1}$ मिळतो.

खालील गुणाकारांचे निरीक्षण करा आणि रिकाम्या जागा भरा.

$7 \times \frac{1}{7} = 1$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 2} = \frac{6}{6} = 1$

$\frac{1}{9} \times 9 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\frac{2}{7} \times \ldots\ldots\ldots\ldots = 1$

$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $\ldots\ldots\ldots \times \frac{5}{9} = 1$

अशाच आणखी पाच जोडयांच्या गुणाकार करा.

कोणत्याही दोन शून्योत्तर संख्यां ज्यांचा गुणाकार 1 येतो , त्यानां एकमेकींच्या गुणाकारव्यस्त संख्या असे म्हणतात.

म्हणून $\frac{4}{7}$ ची गुणाकार व्यस्त संख्या $\frac{7}{4}$ आणि $\frac{7}{4}$ ची गूणाकारव्यस्त संख्या $\frac{4}{7}$

$\frac{5}{9}$ आणि $\frac{2}{5}$ ची गुणाकारव्यस्त संख्या कोणती ?

हे करा

1. छेदादिक अपूर्णांकाचे गुणाकारव्यस्त छेदादिक अपूर्णांक असतील काय ?
2. अंशाधिक अपूर्णांकाचे गुणाकारव्यस्त अंशाधिक अपूर्णांक असतील काय ?

म्हणून आपण म्हणू शकतो

$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 1 \times$ चा गुणाकार व्यस्त $\frac{1}{2}$.

$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times \frac{4}{1} = 3 \times$ चा गुणाकार व्यस्त $\frac{1}{4}$.

$3 \div \frac{1}{2} = ... = ...$

राजूने विरुद्ध प्रक्रिया वापरून मिश्र दशांश अपूर्णांकाची क्रिया केली. ती अशी

$1\frac{1}{2}$ ची $1\frac{2}{1}$. आहे हे बरोबर आहे का तपासा.

म्हणून $2 \div \frac{3}{4} = 2 \times$ चा गुणाकार व्यस्त $\frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3}$.

$5 \div \frac{2}{4} = 5 \times$ .... $= 5 \times$.....................

एखाद्या पूर्णांक संख्येला अपूर्णांक संख्येने भागणे म्हणजेच (त्या संख्येला) तिच्या गुणाकार व्यस्ताने गुणने.

हे करा.

शोधा (i) $9 \div \frac{2}{5}$ (ii) $3 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$

पुर्णांक संख्येला एक मिश्र पुर्णांकाने भाग घालतांना सर्वप्रथम मिश्र अपुर्णांकाला अंशाधिक अपुर्णांकात रुपांतर करुन घेऊ आणि नंतर त्याची सोडवणुक करु

उदा $4 \div 3\frac{2}{5} = 4 \div \frac{17}{5} = 4 \times \frac{5}{17} = \frac{20}{17}$ शोधा, $11 \div 3\frac{1}{3} = 11 \div \frac{10}{3} = ?$

हे करा.

शोधा (i) $7 \div 5\frac{1}{3}$ (ii) $5 \div 2\frac{4}{7}$

2.2.2 अपूर्णांकाला पूर्णांकाने भागणे.

1 $\frac{3}{4} \div 3$ = किती ?

पूर्वीच्या निरीक्षणावर आधारित आपल्याला : $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

म्हणून, $\frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = ?$ $\frac{5}{7} \div 6$ and $\frac{2}{7} \div 8$? हे काय आहेत?

पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकाला पूर्णांकाने भागतांना आपण पूर्णांकयुक्त अपूर्णांकांचे अंशाधिक अपूर्णांकात रूपांतर करू.

$2\frac{1}{3} \div 5 = \frac{7}{3} \div 5 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$. शोधा $4\frac{2}{5} \div 3 = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots;$ $2\frac{3}{5} \div 2 = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

2.2.3 अपूर्णांकाला अपूर्णांकाने भागणे

आता आपण पाहूया $\frac{1}{4} \div \frac{5}{6}$.

$\frac{1}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \times$ गुणाकार व्यस्तता $\frac{5}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

तसेच $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{5} \times$ गुणाकार व्यस्तता $\frac{2}{3} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$ आणि $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

हे करा.

शोधा (i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$

उदा.8 : एक पोहण्याचा रिकामा तलाव त्याच्या क्षमतेच्या $\frac{9}{10}$ भरलेला आहे तलावाचा $\frac{3}{10}$ भाग भरण्यासाठी

अर्धा तास लागतो तर तलावाचा $\frac{9}{10}$ भाग भरण्यासाठी किती वेळ लागेल.

उकल: $\frac{9}{10}$ मध्ये $\frac{3}{10}$ किती वेळा आहेत हे शोधावे लागेल. $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10}$ हा भागाकार करा.

$\frac{9}{10} \times \frac{10}{3} = 3$ म्हणजेच 3 अर्धे तास $1\frac{1}{2}$ तास तो तलाव $\frac{9}{10}$ भरण्यासाठी लागतील.

स्वाध्याय 4

1. खालील अपूर्णांकाचे गुणाकारव्यस्त शोधा.

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{8}{7}$ (iii) $\frac{13}{7}$ (iv) $\frac{3}{4}$

2. शोधा

(i) $18 \div \frac{3}{4}$ (ii) $8 \div \frac{7}{3}$ (iii) $3 \div 2\frac{1}{3}$ (iv) $5 \div 3\frac{4}{7}$

3. शोधा

(i) $\frac{2}{5} \div 3$ (ii) $\frac{7}{8} \div 5$ (iii) $\frac{4}{9} \div \frac{4}{5}$

4. उदाहरणे 1, 2, 3 सारखे 5 गणिते तयार करुन सोडवा.

5. दिपक एका दिवसात एका घराची $\frac{2}{5}$ रंगरंगोटी करतो त्साने याच गतीने काम केले तर संपूर्ण घराला रंगरंगोटी करण्यास त्याला किती दिवस लागतील ?

2.3 दशांश संख्या किंवा दशांश अपूर्णांक

इयत्ता सहावीमध्ये आपण दशांश संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी शिकले त्याचे आपण पूनरावलोकन करूया आणि नंतर दशांश अपूर्णांक गुणाकार आणि भागाकार शिकूया.

12714 ला प्रथम विस्तारीत रूपात लिहू.

$12714 = 1 \times 10000 + 2 \times 1000 + 7 \times ......+ 1 \times ...... + 4 \times 1$

12714.2 चे विस्तारीत रूप काय होईल ?

आपल्याला असे आढळून येते की उजवीकडुन डावीकडे जातांना 10 च्या पटीत किंमत वाढत असते.

म्हणून $\xleftarrow{\times 10}$ 10 thousands = 10 thousand $\xleftarrow{\times 10}$ 10 hundreds = 1thousand $\xleftarrow{\times 10}$ 10 tens = 1 hundred $\xleftarrow{\times 10}$ 10 units = 1 ten $\xleftarrow{\times 10}$ 1 unit

आता आपण डावकडून उजवीकडे जातांना काय होते? तर आपल्याला आढळून येईल की संख्येची किंमत 10 ने भागलेल्या किंमतीऐवढी मिळते.एकक संख्येला 10 ने भागल्यास काय होईल ? आपण हे शिकलो आहोत हे लक्षात ठेवा $1 \div 10 = \frac{1}{10} = 0.1$

1 unit $\xrightarrow{\div 10}$ 10^{th} part or $\frac{1}{10}$ or 0.1 $\xrightarrow{\div 10}$ 100^{th} part or $\frac{1}{100}$ or 0.01 $\xrightarrow{\div 10}$ 1000^{th} part or $\frac{1}{1000}$ or 0.001 $\xrightarrow{\div 10}$ पुढे...

अशाप्रकारे 12714.2 चे विस्तारीत रूप

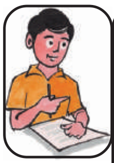
$$12714.2 = 1\times 10000 + 2\times 1000 + 7\times \ldots\ldots + 1\times \ldots\ldots + 4\times 1 + 2\times \frac{1}{10}$$

आता 3.42 मधील सर्व अंकाची स्थानिक किंमत शोधा.दशांश चिन्हामुळे संपूर्ण संख्या अपूर्णांकापासून वेगळी होते हे तुमच्या लक्षात आले असेल. दशांश चिन्हाच्या उजवीकडील भागाला दशांश भाग म्हटले जाते जे की 1 चा भाग दर्शवितो.

दशांश चिन्हाच्या डावीकडील भागाला संख्येचा पूर्णांक भाग म्हटले जाते.

3.42 या संख्येत-

	3 एकक स्थानी	4 दशांश चिन्हानंतर पहिल्या स्थानावर	2 दशांश चिन्हानंतर दुसऱ्या स्थानावर आहे.
स्थानिक किंमत	$3\times 1 = 3$	$4\times\frac{1}{10} = \frac{4}{10}$ or .4	$2\times\frac{1}{100} = \frac{2}{100}$ or .02



सरावासाठी

1. खालील सारणी बघा आणि रिकाम्या जागा भरा.

शतक (100)	दशक (10)	एकक (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$	सहस्त्रांश $\left(\frac{1}{1000}\right)$	संख्या
5	4	7	8	2	9	547.829
0	7	2	1	7	7	______
3	2	__	__	5	4	327.154
6	__	4	__	2	__	614.326
2	__	6	5	__	2	236.512

2. खालील संख्या विस्तारीत रूपात लिहा

(i) 30.807 (ii) 968.038 (iii) 8370.705

नाणे (चलन) लांबी, वजन यांचे एका एककातुन दुसऱ्या एककात रूपांतर करतांना नेहमी दशांशाचा वापर करतो.

उदा.5 = ₹ $\frac{5}{100}$ = ₹0.05; $220\text{ g} = \frac{220}{1000}\text{kg} = 0.220\text{ kg}$; $5\text{ cm} = \frac{5}{100}\text{ m} = 0.05\text{ m}$

सरावासाठी

शोधा (i) 50 पैसे = ₹ _____ (ii) 22 g = _____ kg (iii) 80 cm = m

2.3.1 दशांश संख्यांची तुलना

अभिषेक आणि नेहाचे किडी (लहान मुलाच्या) बँकेत अनुक्रमे ₹ 375.00 आहेत तर कुणाकडे जास्त पैसे आहेत ? जास्त रक्कम कुणाकडे आहे हे शोधण्यासाठी प्रथम आपण दशांश चिन्हाच्या डावीकडील अंकाची तुलना करू तेव्हा उजवीकडील दशक स्थानाच्या अंकाची तुलना करू.
आपल्या लक्षात येईल की अभिषेककडे 7 दशांश आणि नेहाकडे पाच दशांश आहेत.
7 दशांश > 5 दशांश
म्हणून अभिषेककडे नेहापेक्षा जास्त रक्कम आहे. ती म्हणजे 375.00 > 375.50
खालील संख्याच्या जोडीतील कोणती संख्या मोठी आहे हे तुलना करून लवकर सांगा.

(i) 37.65 आणि 37.60 (ii) 1.775 सोबत 19.780 (iii) 364.10 आणि 363.10

15 जोड्या तयार करुन मोठी व छोटी तुलना करा.

आता आपण दशांशाची संख्याची बेरीज आणि वजाबाकी बघू

(i)	221.85 + 37.10	(ii) 39.70 - 6.85
	221.85	39.70
	+37.10	- 06.85
	258.95	32.85

दशांशाची बेरीज किंवा वजाबाकी करताना दशांश ज्या जागेवर मूळ गणितात लिहिले असतील तेथेच लिहावे. म्हणजेच एकाखाली एक दशांश आले पाहिजेत. एखाद्यावेळेस लिहिलेल्या संख्येमध्ये आकडे कमी असल्यास दशांशाच्या उजव्या बाजूला जेवढ्या जागा रिकाम्या असतील तेवढी शून्य द्यावीत.

हे करा.

शोधा (i) 0.25 + 5.30 (ii) 29.75 - 25.97.

उदा.9 : एका समद्वीभूज त्रिकोणाच्या दोन समान बाजूंची लांबी प्रत्येकी 3.5 सेमी आणि दुसरी बाजू 2.2 सेमी आहे तर त्या त्रिकोणाची परिमिती किती ?

उकल : समद्वीभूज त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची लांबी प्रत्येकी 3.5 सेमी व दुसऱ्या बाजूची लांबी 2.5 सें.मी

त्रिकोणाची परिमिती = तीनही बाजूच्या लांबीची बेरीज

= 3.5 सें.मी. + 3.5 सें.मी. + 2.5 cm = 9.5 सें.मी.

स्वाध्याय 5

1 सें.मी. = 10 मि.मी.
1 मी. = 100 सें.मी.
1 कि.मी. = 1000 मी.
1 कि.ग्रॅ. = 1000 ग्रॅ.

1. खालील पैकी मोठा दशांश कोणता ?
   (i) 0.7 / 0.07 (ii) 7 / 8.5
   (iii) 1.47 / 1.51 (iv) 6 / 0.66
2. दशांश चिन्हाचा उपयोग करून रूपयात रूपांतर करा.
   (i) 9 पैसे (ii) 77 रुपये 7 पैसे (iii) 235 पैसे
3. (i) 10 सें.मी. चे मीटर आणि किमीमध्ये रूपांतर करा.
   (ii) 45 मि.मी चे सेंटीमीटर, मीटर आणि किलोमीटरमध्ये रूपांतर करा.

4. खालील संख्या किलोग्रॅममध्ये लिहा.

(i) 190 ग्रॅ. (ii) 247 ग्रॅ. (iii) 44 कि. 80 ग्रॅ.

5. खालील दशांश संख्या त्यांच्या विस्तारीत रूपात लिहा.

(i) 55.5 (ii) 5.55 (iii) 303.03

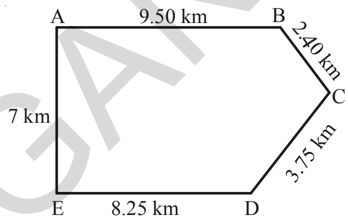
(iv) 30.303 (v) 1234.56

6. खालील दशाांश संख्यामधील 3 ची स्थानिक किंमत लिहा.

(i) 3.46 (ii) 32.46 (iii) 7.43

(iv) 90.30 (v) 794.037

7. अरूणा आणि राधाने A आणि E या अशा दोन वेगवेगळ्या ठिकाणाहून प्रवासास सुरूवात केली अरूणाने A या ठिकाणापासून B नंतर C आणि राधाने E या ठिकाणापासून D आणि नंतर C असा मार्ग निवडला. तर कोणी जास्त प्रवास केला केला आणि किती ?



8. उपेंद्र भाजीपाला खरेदीसाठी बाजारात गेला त्याने 2 किलो 250 ग्रॅम टमाटे 2 किलो 500 ग्रॅम बटाटे , 750 ग्रॅम भेंडी आणि 125 ग्रॅम ग्रॅम हिरवी मिरची खरेदी केली तर उपेंद्रने त्याच्या घरी किती ओझे / वनज आणले ?

2.4 दशांश अपूर्णांकाचा गुणाकार

सातवीतील राजेंद्र आपल्या आईबरोबर भाजीपाल खरेदीसाठी बाजारात त्यांनी र 8.50 प्रति किलो प्रमाणे 2.5 किलो बटाटे खरेदी केले तर त्यांना भाजीवाल्याला देण्यासाठी किती रूपयांची आवश्यकता आहे ?

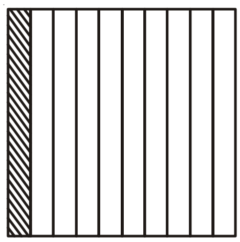
आपल्या दैनंदीन जीवनात असे अनेक प्रसंग येतात जेथे आपल्याला दोन दशांशस्थळांपर्यंत गुणाकार करावा लागतो.

चला तर आपण दशांशअपूर्णांकाचा गूणाकार शिकू.

प्रथम आपण गुणाकार करू 0.1 ह 0.1

0.1 म्हणजेच 10 भागांपैकी 1 भाग हेच अपूर्णांकाच्या सहायाने $\frac{1}{10}$ असे दाखविते.

आकृती बघा आकृती 1.

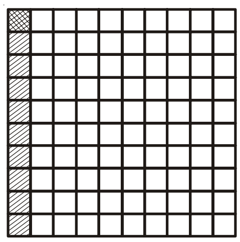


आकृती 1

अशाप्रकारे $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ म्हणजेच $\frac{1}{10}$ चा $\frac{1}{10}$

म्हणून आपण 10 चा $\frac{1}{10}$ वा भाग शोधू.

आपण $\frac{1}{10}$ चे 10 समान भागात विभाजन करू आणि त्यापैकी एक भाग घेऊ.



आकृती 2

हे आकृती 2 मधील एका चौरसाने दाखविले आहे. आकृती 2 मध्ये किती चौरस आहेत ? येथे 100 चौरस आहेत.

$$0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0.01$$

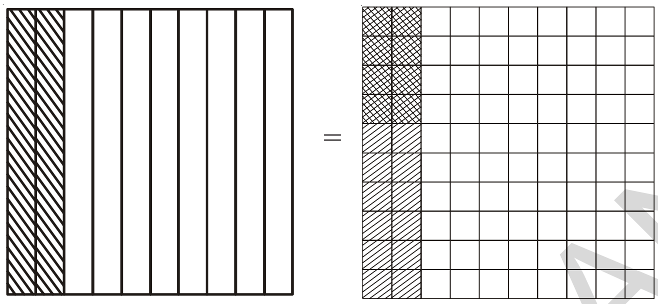
आता आपण पाहू 0.4×0.2

$$0.4 \times 0.2 = \frac{4}{10} \times \frac{2}{10} \quad \text{or} \quad \frac{4}{10} \text{ of } \frac{2}{10}$$

आकृतीच्या सहायाने

$\frac{2}{10}$

$\frac{4}{10}$ of



$= \frac{8}{100}$

येथे 100 पैकी 8 चौरस हे दूहेरी छायांकित आहेत हेच आपण 0.08 असे दाखवतो आपण 0.1ह्व0.1 आणि 0.4ह्व0.2 याच्या किमती काढतांना प्रथम त्यांच्या दशांश चिन्हाचां विचार न करता सर्व संख्याच्या गुणाकार करतो हे तुमच्या लक्षात आले असेल.

0.1ह्व0.1 यामध्ये आपल्याला असे दिसून येईल की 0.1ह्व0.1किंवा1ह्व1अशाच प्रकारे 04ह्व02किवा 4ह्व2 आणि त्याच्या गुणाकार अनुक्रमे 1 आणि 8 येतो.

0.1ह्व0.1 आणि 0.4ह्व0.2 या दोन्ही गुणाकारात दशांश चिन्हानंतर प्रत्येकी दोन संख्या आहेत म्हणून दशांश चिन्ह उजवीकडून डावीकडे जातांना दोन संख्या सोडून द्यावे लागेल.

अशाप्रकारे 0.1ह्व0.1= 0.1 किंवा 0.01

$0.4 \times 0.2 = .08$ किंवा 0.08

दशांशांचा गुणाकार करताना दशांश चिन्हाच्या उजवीकडील संख्याच आपण विचारात घेत असतो.

जर आपण 0.5ह्व0.5 यांचा गुणाकार केला तर येणाऱ्या गुणाकारात आपल्याला उजवीकडून डावीकडे तीन स्थाने सोडून दशांश चिन्ह द्यावे लागले. $0.5 \times 0.05 = .025$.

आता आपण गुणाकार करू 1.2×2.5

12 आणि 25 मध्ये उजवीकडून प्रत्येकी एक स्थान सोडून दशांश चिन्ह आहे. म्हणून 1+1=2 अंक मोजा. उजवीकडील अंकापासून (उदा.) 300 मध्ये दोन स्थाने डावीकडे सरका. आपल्याला 3.00 किंवा 3 मिळतो. अशाप्रकारे 1.2ह्व2.5=3

1.2ह्व2.5 यांचा गुणाकार करतांना प्रथम आपण 2.5ह्व1.25 यांचा गुणाकार करू आलेल्या गुणाकारात आपण मोजलेले दशांश स्थाने 1+2=3 (का ?) 2.5ह्व1.25=3.225

सरावासाठी

1. शोधा (i) 1.7×3 (ii) 2.0×1.5 (iii) 2.3×4.35
2. आलेला गुणाकार उतरत्या क्रमांकाने लावा

उदा 10 : आयताची लांबी 7.1 रूंदी 2.5 आहे. क्षेत्रफळ काढा.

उकल : आयताची लांबी = 7.1 सें.मी.

आयताची रूंदी = 2.5 सें.मी

आयताचे क्षेत्रफळ = $7.1 \times 2.5 = 17.75$ सें.मी.^{2}

2.4.1 दशमान संख्येचा गुणाकार 10, 100, 1000 इत्यादी

रेश्माचे निरीक्षण $3.2 = \frac{32}{10}$ या ठिकाणी $2.35 = \frac{235}{100}$ दशांश शोधला. छेद अंशात रूपांतर केला. तेव्हा तिला असे आढळले की, दशांश संख्येचे रूपांतर पूर्ण संख्येमध्ये करता येते.

जसे 10 किंवा 100 इत्यादी.

तिला आश्चर्य वाटले हे काय झाले. जेव्हा याला 10, 100, 1000 ने गुणल्यास.

दशांशाची किंमतही 10, 100, 1000 यापटीने वाढत जाते. तर चला पाहुया

पहा आणि तक्ता पूर्ण करा.

$1.76 \times 10 = \frac{176}{100} \times 10 = 17.6$	$2.35 \times 10 = ...$	$12.356 \times 10 = ...$
$1.76 \times 100 = \frac{176}{100} \times 100 = 176$ or 176.0	$2.35 \times 100 = ...$	$12.356 \times 100 = ...$
$1.76 \times 1000 = \frac{176}{100} \times 1000 = 1760$ or 1760.0	$2.35 \times 1000 = ...$	$12.356 \times 1000 = ...$
$0.5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = 5$; $0.5 \times 100 = ...$;	$0.5 \times 1000 = ...$	

तुमचे उत्तर शोधा आणि दशांश अपूर्णांकाचा गुणाकार बघा कोणत्याही संख्येवर किती शुन्य वाढविल्यास उत्तर दशांश मध्येच येतो.

2.4.2 दशांश अपूर्णांकांचा भागाकार

गोपाल आपल्या वर्गसजावटीची तयारी करीत होता. त्यासाठी त्याला प्रत्येकी 1.6 सें.मी. लांबीच्या काही रंगीत कागदाच्या तुकडयांची आवष्यकता होती.

त्याच्याजवळ 9.6 सें.मी. लांबीचा रंगीत कागदाचा तुकडा होता त्या कागदाच्या तुकडयापासून त्याला हव्या असलेल्या लांबीचे किती तुकडे मिळतील ?

त्याला वाटते $\frac{9.6}{1.6}$ सें.मी. हे बरोबर आहे काय ? 9.6 आणि 1.6 ह्या दोन्ही दशांश संख्या आहेत.

म्हणून आपल्याला दशांश संख्याचां भागाकार माहित असणे आवश्यक आहे.

2.4.2 अ) 10 , 100 , 1000 इत्यादी संख्येने भागणे.

आता आपण दशांश संख्येला 10, 100, 1000 ने लागू

समजा $31.5 \div 10$.

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

तसेच, $31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \div 100 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$

10, 100, 1000 ने भागतांनाच एखादा नियम आहे काही असल्यास हा आपणास 10, 100 किंवा 1000 ने भागतांना जवळचा मार्ग मदत करेल. खाली दिलेल्या नमून्यांचे निरीक्षण करा व ती सारणी पूर्ण करा.

$29.5 \div 10 = 2.95$	$132.7 \div 10 =$	$1.5 \div 10 =$	$17.36 \div 10 =$ ....
$29.5 \div 100 = 0.295$	$132.7 \div 10 =$	$1.5 \div 100 =$	$17.36 \div 100 =$ ....
$29.5 \div 1000 = 0.0295$	$132.7 \div 1000 =$	$1.5 \div 1000 =$	$17.36 \div 1000 =$ ....

2.4.2 (ब) दशांश अपूर्णांकाला पूर्णांकाने भागणे.

आता आपण $\frac{6.4}{2}$ चा भागाकार शोधू. आपण हेच $6.4 \div 2$ असेही लिहु शकतो हे लक्षात ठेवा..

म्हणून, $6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2 = \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$ (जे आपण पूर्णांकात शिकलो.)

$$= \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2} = \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

आता आपण सोडवूया $12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4 = \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4} = \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$

सरावासाठी

1. शोधा (i) $35.7 \div 3$ (ii) $25.5 \div 3$

उदा.11 : 4.2 आणि 7.6 ची सरासरी काढा.

उकल: 4.2 , 3.8 आणि 7.6 ची सरासरी $\frac{4.2+3.8+7.6}{3} = \frac{15.6}{3} = 5.2$

2.4.2 एका दशांश संख्येला दुसऱ्या दशांश संख्येने भागणे.

चला तर आपण एका दशांश संख्येला दुसऱ्या दशांश संख्येने कसे भागावे हे शोधू.

उदा. $35.5 \div 0.5. = \frac{355}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{355}{10} \times \frac{10}{5} = 71$

अशाप्रकारे $35.5 \div 0.5 = 71$.

उदा. 12 : एक ट्रक 2.5 तासात 92.5 किती अंतर कापतो तर संपूर्ण प्रवासात ट्रकचा वेग समान असेल तर एका तासात तो तो ट्रक किती अंतर पार करेल.

उकल : ट्रकने कापलेले अंतर = 92.5 किमी

हे अंतर कापण्यासाठी लागलेला वेळ = 2.5 तास

एका तासात ट्रकने कापलेले अंतर $= \frac{92.5}{2.5} = \frac{925}{25} = 37$ किमी

स्वाध्याय 6

1. खालील उदाहरणे सोडवा.

(i)	0.3×6	(ii)	7×2.7	(iii)	2.71×5
(iv)	19.7×4	(v)	0.05×7	(vi)	210.01×5
(vii)	2×0.86				

2. एका आयताची लांबी 6.2 सेमी आणि रूंदी 4 सेमी आहे तर त्याचे क्षेत्रफळ किती ?

3. खालील उदाहरणे सोडवा.

(i) 21.3×10 (ii) 36.8×10 (iii) 53.7×10

(iv) 168.07×10 (v) 131.1×100 (vi) 156.1×100

(vii) 3.62×100 (viii) 43.07×100 (ix) 0.5×10

(x) 0.08×10 (xi) 0.9×100 (xii) 0.03×1000

4. एक मोटरसायकल एक लिटर पेट्रोलमध्ये 62.5 किमी अंतर चालते तर 10 लिटर पेट्रोलमध्ये ती किती अंतर चालेल ?

5. खालील उदाहरणे सोडवा.

(i) 1.5×0.3 (ii) 0.1×47.5 (iii) 0.2×210.8

(iv) 4.3×3.4 (v) 0.5×0.05 (vi) 11.2×0.10

(vii) 1.07×0.02 (viii) 10.05×1.05 (ix) 101.01×0.01

(x) 70.01×1.1

6. खालील उदाहरणे सोडवा.

(i) $2.3 \div 100$ (ii) $0.45 \div 5$ (iii) $44.3 \div 10$

(iv) $127.1 \div 1000$ (v) $7 \div 3.5$ (vi) $88.5 \div 0.15$

(vii) $0.4 \div 20$

7. एका नियमित बहूभूजाकृतीच्या एका बाजूची लांबी 3.5 सेमी आहे बहूभूजाकृतीची परिमिती 17.5 सेमी आहे तर त्या बहूभूजाकृतीला किती बाजू असतील ?

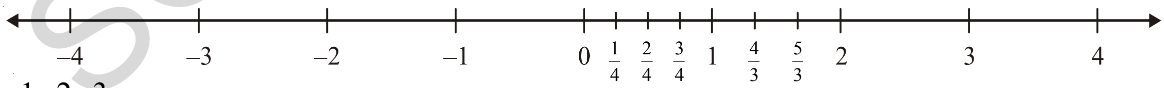
8. 7 तासांत 0.896 सेमी पर्जन्याची नोंद झाली तर प्रतितास पर्जन्याची सरासरी किती होती ?

2.5 परिमेय संख्याची ओळख

2.5.1 धनअपूर्णांक संख्या

आपण पूर्ण संख्या आणि अपूर्णांकाविषयी शिकलो

संख्यारेषेवर पूर्ण संख्या आणि अपूर्णांक हे दोन्ही दाखविल्यानंतर संख्यारेषा कशी दिसते ते पहा.



$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ .... या सर्व संख्या संख्यारेषेवर 0 आणि 1 या संख्या दरम्यान आहेत हया सर्व संख्या 1 पेक्षा लहान आहेत. आपण त्यांना छेदादिक अपूर्णांक असे म्हणतो.

$\frac{4}{3}$ आणि $\frac{5}{3}$ हे 1 आणि 2 या संख्यादरम्यान आहेत हे आपणास माहित आहे आपण त्यांना अंशाधिक अपूर्णांक असे म्हणू शकतो या सर्वांना धन अपूर्णांक संख्या असे म्हणतात.

सरावासाठी

1. (i) 0 आणि 1 आणि (ii) 1 आणि 2 या संख्यादरम्यान असणारे आणखी 5 अपूर्णांक लिहा.
2. संख्यारेषेवर $4\frac{3}{5}$ कोठे असतील ?

0 च्या डावीकडील संख्या लहान लहान होत जातात –1, –2, –3 ....

संख्यारेषेवर जसजसे आपण डावीकडे जातो तसतसा संख्या वाढतात का लहान होत जातात ?

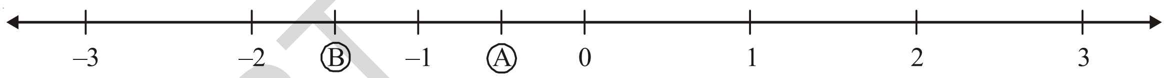
तर आपण जसजसे डावीकडे जातो तसतसा संख्या लहान होत जातात हे आपणास माहित आहे.

सरावासाठी

1. खालील गटातुन सर्वात मोठी व सर्वात लहान संख्या शोधा.
   (i) 2, –2, –3, 4, 0, –5
   (ii) –3, –7, –8, 0, –5, –2
2. खालील संख्या चढत्या क्रमाने लिहा.
   (i) $-5, -75, 3 - 2, 4, \frac{3}{2}$ (ii) $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 0, -1, -2, 5$

2.5.2 ऋण अपूर्णांक संख्या.

संख्यारेषेवरील बिंदू A चा विचार करा.



संख्यारेषेवर A हा 0 आणि –1 च्या दरम्यान आहे.
तो 0 पेक्षा मोठा किंवा 0 पेक्षा लहान आहे काय ?

तो $\frac{1}{2}$ आहे काय ? आपण त्याला $\frac{1}{2}$ म्हणू शकत नाही.

कारण तो 0 पेक्षा लहान आहे.

आपण A = $-\frac{1}{2}$ असे लिहू शकतो

आणि तो 0 पेक्षा लहान आहे

तसेच B हा – 1 आणि –2 च्या मध्यभागी आहे. $-\frac{3}{2}$

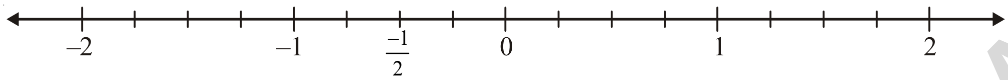
नेहाला सोपी मांडणी पद्धत आढळून आली $\frac{-9}{4}$.तिने मिश्र अपूर्णांक लिहिला. $\frac{-9}{4} = -2\frac{1}{4}$ आणि नंतर तिने –2, –3 असे दाखवले.

$-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}$ अशा प्रकारचा ऋण अपूर्णांक संख्या आपल्याला कोणत्याही दोन ऋण पूर्ण संख्या किंवा 0 आणि ऋण पूर्ण संख्या यांच्या दरम्यान दिसतात.

सरावासाठी

1. खाली दिलेल्या संख्यारेषेवर पुढील संख्या दाखवा.

(i) $-\frac{7}{2}$ (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $\frac{-7}{4}$ (v) $\frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{1}{4}$



मोठी संख्या रेषा तयार करुन जास्त धन व ऋण संख्या दर्शवा.

2. संख्यारेषेवरील खालील संख्या विचारात घ्या.

$27, -\frac{7}{8}, \quad \frac{11}{943}, \quad \frac{54}{17}, \quad -68, \quad -3, \quad -\frac{9}{6}, \quad \frac{7}{2}$

(i) यापैकी कोणत्या संख्या खालील संख्याच्या डावीकडे आहेत.

(a) 0 (b) –2 (c) 4 (d) 2

(ii) यापैकी कोणत्या संख्या खालील संख्याच्या उजवीकडे असतील.

(a) 0 (b) –5 (c) $3\frac{1}{2}$ (d) $\frac{-5}{2}$

2.5.3 परिमेय संख्या

0,1,2,3,4,5, या पूर्ण संख्या आहेत हे आपल्याला माहित आहे –7,–6,–5,–4,–3,–2,–1 0,1,2,3,4,5, हया संख्याच्या मोठा समूहाला आपण पूर्णसंख्या असे म्हणतो.

राणी म्हणते सर्व पूर्ण संख्या हया पूर्णांक संख्या असतात परंतू सर्व पूर्णांक संख्या हा पूर्ण संख्या असताततच असे नाही तुम्ही तिच्याशी सहमत आहात का ? राणा म्हणते ते बरोबर आहे. कारण ऋण संख्या जसे –6,–5,–4,–4,–3,–2,–1 इत्यादी पूर्णांक संख्या आहेत परंतू पूर्ण संख्या नाहीत. हया पूर्ण संख्या असतातच असे नव्हे

आपल्याला माहित आहे की धन अपूर्णांक संख्या जसे $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{5}{6},\frac{11}{5},\frac{8}{8}$ हया पूर्ण संख्यांचे गुणोत्तर असतात.

सर्व अपूर्णांक संख्या सामान्यत: $\frac{w_1}{w_2}$ अशा स्वरूपात आपण लिहु शकतो परंतु w_1 आणि w_2 पूर्ण संख्या असाव्यात आणि w_2=0 नसावा.

सरावासाठी

पाच अपूर्णांक संख्या लिहा आणि प्रत्येकीमधील w_1 w_2 शोधा.

परिमेय संख्या हा संख्यांचा मोठा संच असून त्यामध्ये सर्व पूर्णांक संख्या धन अपूर्णांक संख्या आणि सर्व ऋण अपूर्णांक संख्याचा समावेश असतो.

$\frac{-7}{3}, \frac{-5}{2}, \frac{-7}{7}, \frac{-2}{7}, 0, \frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{17}{5}, \frac{6}{1}$ इत्यादी या संख्या परीमेय संख्या होत.

या सर्वामध्ये आपल्याला दोन पूर्णांकाचे गुणोत्तर मिळते जसे **p** ही पूर्णांक संख्या व q ही शून्येत्तर पूर्णांक संख्या असेल तर $\frac{p}{q}$ ही परिमेय संख्या होय. परिमेय संख्येचा संच **Q** ने दर्शवितात.

सरावासाठी

(i) कोणतेही 5 पूर्णांक घ्या आणि त्यांच्यापासून शक्य तेवढया परिमेय संख्या तयार करा.

(ii) कोणत्याही पाच परिमये संख्या घेऊन त्यांच्यात कोणते पूर्णांक समाविष्ट आहेत ते शोधा.

2.5.4 परिमेय संख्याची तुलना

$\frac{3}{4}$ आणि $\frac{9}{12}$ हे समान अपूर्णांक आहेत हे आपणास माहित आहे

अपूर्णांकाची तुलना करतांना जेव्हा दोन परिमेय संख्याचे छेद समान नसतात तेव्हा आपण छेद समान करून घेतो आणि त्यांच्यातील लहानमोठेपणा पणा ठरवितो हे आपणास माहित आहे.

उदा. $\frac{3}{4}$ आणि $\frac{5}{7}$. ची तुलना करण्यासाठी आपण दोन्ही अपूर्णांकाचे सममूल्य अपूर्णांक लिहू.

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20}, \frac{18}{24}, \frac{21}{28}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ आणि

$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14}, \frac{15}{21}, \frac{20}{28} \ldots\ldots$$

आता आपण $\frac{21}{28}$ हा $\frac{20}{28}$ शी तुलना करू

$\frac{21}{28}$ हा $\frac{20}{28}$

म्हणून, $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$

सरावासाठी

1. $\frac{3}{4}$ चे आणखी तीन सममूल्य अपूर्णांक लिहा आणि ते संख्याबरोबर दाखवा. तुम्हाला काय आढळून येते ?
2. $\frac{6}{7}$ चे सर्व सममूल्य अपूर्णांक संख्यारेषेवर सारखाच बिंदू दर्शवितील काय?

आता $\frac{-1}{2}$ आणि $\frac{-2}{3}$ ची तुलना करा.

आपण दशांशांना खालील दोन्ही प्रकारे लिहितो.

$$\frac{-1}{2}=\frac{-2}{4},\frac{-3}{6},\frac{-4}{8} \text{ ....}$$

$$\frac{-2}{3}=\frac{-4}{6},\frac{-6}{9} \text{ ....}$$

आपण $\frac{-3}{6}$ आणि $\frac{-4}{6}$ यांची तुलना करू शकतो. कारण दोघांचे हा छेद समान आहेत. $\frac{-4}{6}<\frac{-3}{6}$

$$\therefore \frac{-2}{3}<\frac{-1}{2}$$

सरावासाठी

1. $\frac{-1}{2}$ आणि $\frac{-3}{6}$ संख्यारेषेवरील एकच बिंदू दर्शवतील काय?
2. $\frac{-2}{3}$ आणि $\frac{-4}{6}$ हे दोन्ही सममूल्य आहेत काय ?

जसे : जेव्हा आपण त्यांना संख्यारेषेवर दाखवितो तेव्हा त्या एकाच बिंदूवर असतात

म्हणून $\frac{-1}{2}$ आणि $\frac{-2}{4}$ हया सममूल्य परिमेय संख्या आहेत असे आपण म्हणू शकतो.

सरावासाठी

1. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-7}{9}$ (iii) $-\frac{3}{7}$ अशी सममूल्य असलेल्या 5 परिमेय संख्या लिहा.

2. खालील प्रश्नातील सममूल्य परिमेय संख्या शोधा.

   (i) $\frac{-1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-4}{8}$

   (ii) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{10}{6}, \frac{2}{4}, \frac{20}{12}$

2.5.5 आपण असे म्हणू शकतो की, परिमेय संख्यांचा गुणाकार किंवा भागाकार करताना अंश आणि छेद हे समान पद्धतीने असावेत खालील उदाहरणे तपासून पाहा.

उदा.,

$\frac{1}{5}$ साठी सममूल्य संख्या $\frac{1\times2}{5\times2}=\frac{2}{10}$ दुसरी सममूल्य संख्या $\frac{1\times3}{5\times3}=\frac{3}{15}$.

$\frac{-2}{7}$ साठी सममूल्य संख्या $\frac{-2\times2}{7\times2}=\frac{-4}{14}$ दुसरी सममूल्य संख्या $-\frac{2\times3}{7\times3}=\frac{-6}{21}$

अशा प्रकारे आपण अनेक सममूल्य परिमेय संख्या गुणाकाराच्या तुलनेत पुढे नेऊ शकतो.

उदा. $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}\ldots$

स्वाध्याय 7

1. खालील संख्याना सममूल्य असलेल्या कोणत्याही तीन परिमेय संख्या लिहा.

   (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $-\frac{3}{8}$

2. $\frac{-15}{36}$ या संख्येला सममूल्य असलेली परिमेय संख्या जिचा (i) छेद 12 (ii) अंश 75 असेल अशी शोधा?

3. खालील परिमेय संख्या संख्यारेषेवर दाखवा.

   (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{3}{2}$ (iv) $\frac{10}{3}$

3. खालील विधाने सत्य किंवा असत्य ते शोधा

(i) प्रत्येक पूर्णांक संख्या ही परिमेय संख्या असने आणि तसेच उलटपक्षी केल्यास. ( )

(ii) परिमेय संख्येचा $\frac{p}{q}$, q आकृतीबंधात हा शुन्योत्तर पूर्णांक असावा. ( )

(iii) प्रत्येक दशांश संख्या ही परिमेय संख्येने दाखविता येते. ( )

(iv) $\frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}$ हया सममूल्य परिमेय संख्या आहेत. ( )

(v) घन परिमेय संख्याची सममूल्य परिमेय संख्या धन असलेला. ( )

हे करा.

1) $\frac{4}{9}+\left(\frac{-5}{12}\right)$ 2) **मिळवा** $\frac{-3}{5}$ **आणि** $\frac{-7}{15}$ 3) $\frac{-10}{11}+\frac{7}{10}$ 4) $\frac{-8}{15}+\left(\frac{-7}{20}\right)$

विचार करा आणि चर्चा करा

1) दोन नैसर्गिक संख्याची बेरीज ही नेहमी दिलेल्या स्वतंत्र पेक्षा जास्त असते का?

2) जर तुमचे उत्तर बरोबर असेल तर पुर्णांक संख्येला लागु पडते का?

3) हे परिमेय संख्येला योग्य आहे का?

2.5.6 परिमेय संख्यांची वजाबाकी

$\frac{5}{6}$ आणि $\frac{3}{8}$ परिमेय संख्या घेवु या.

आता $\frac{3}{8}$ आणि $\frac{5}{6}$ ची वजाबाकी करु

$\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=\frac{(5\times4)-(3\times3)}{24}$ 6, 8 चा लसावी 24

$=\frac{20+(9)}{24}=\frac{29}{24}$

(i) $\left(\frac{-3}{8}\right)$ मधुन $\frac{5}{6}$ वजा करा.

$\frac{5}{6}-\left(\frac{-3}{8}\right)=\frac{(5\times4)-(-3\times3)}{24}$

$=\frac{20-(-9)}{24}$

$=\frac{20+(9)}{24}=\frac{29}{24}$

हे करा

1) $\frac{7}{16}-\left[\frac{-5}{12}\right]=$ } 2) $\frac{-12}{7}$ मधुन $\frac{53}{68}$ वजा करा. 3) $\frac{-8}{15}-\left(\frac{6}{21}\right)=$ }

2.5.7 परिमेय संख्यांची बेरीज आणि वजाबाकी

आपण अपुर्णांकाची बेरीज व वजाबाकी शिकलोत आपण अशीच बेरीज, वजाबाकी क्रिया परिमेय संख्यात करु शकतो.

परिमेय संख्यांची बेरीज

$\frac{5}{6}$ आणि $\frac{3}{8}$ या दोन परिमेय संख्या

या दोन परिमेय संख्यांची बेरीज काय राहिल? चला बेरीज करु या. $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=\frac{5x4}{6x4}+\frac{3x3}{8x3}$

बेरजेसाठी आपण अपुर्णांकाची छेदांची लसावी काढावी लागेल. 6 आणि 8 ची लसावी =24 आहे. प्रथम प्रत्येय छेदाने लसावी ला भागावे म्हणजे

$24\div 6=4$

$24\div 8=3$

आता आपण अंश आणि छेदाला आलेल्या भागाने (भाज्य) गुणावे

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=\frac{5x4}{6x4}+\frac{3x3}{8x3}$$

$$=\frac{20}{24}+\frac{9}{24}$$

$$=\frac{20+9}{24}=\frac{29}{24}$$

आता $\frac{5}{6}$ आणि $\frac{-3}{8}$ ची बेरीज करु या. $\frac{5}{6}+\left[\frac{-3}{8}\right]=\frac{(5x4)+(-3x3)}{24}$

$$=\frac{20}{24}+\left(\frac{-9}{24}\right)=\frac{20+(-9)}{24}=\frac{11}{24}$$

आपण असेही करु शकतो. $\frac{5}{6}+\left[\frac{-3}{8}\right]=\frac{(5x4)+(-3x3)}{24}$

$$=\frac{20+(-9)}{24}=\frac{11}{24}$$

विचार करा आणि चर्चा करा

1) दोन नैसर्गिक संख्याचा फरक हे दिलेल्या संख्याचा पेक्षा लहान असते का?

2) हे पुर्णांक संख्येला लागु पडते का?

3) परिमेय संख्येला लागु पडते का?

पाठचावलोकन

1. अपूर्णांकाची बेरीज, वजाबाकी, करतानां त्यांचे छेद समान असणे आवष्यक आहे हे आपण शिकलो.

2. आपण अपूर्णांकाचा गुणाकार कसा करावा ते शिकलो जसे, $\frac{\text{अंशाचा गुणाकार}}{\text{छेदाचा गुणाकार}}$

3. $\frac{1}{3}6$ चा गुणाकार म्हणजे $= \frac{1}{\cancel{3}} \times \overset{2}{\cancel{6}} = 2$.

4. दोन छेदादिक अपूर्णांकाचा गुणाकार हा त्यातील प्रत्येक अपूर्णांकापेक्षा लहान असतो छेदादिक आणि अंशाधिक अपूर्णांकाचा गुणाकार हा अंशाधिक अपूर्णांकापेक्षा लहान आणि छेदादिक अपूर्णांकापेक्षा मोठा असतो दोन अशांधिक अपूर्णांकाचा गुणाकार हा त्यातील प्रत्येक अपूर्णांकापेक्षा मोठा असतो.

5. अपूर्णांकाचा गुणाकारव्यस्त हा अशं आणि छेद यांच्या अदलीबदलीचे मिळतो.

6. दोन अपूर्णांकाचा भागाकार आपण बघितला आहे.

   (i) पूर्णांक संख्येला अपूर्णांकाने भागतांना आपण पूर्णांक संख्येला अपूर्णांकाच्या गुणाकारव्यस्ताने गुणतो.

   (ii) अपूर्णांकाला पूर्णांकाने अपूर्णांकाला पूर्णांकाच्या गुणाकारव्यस्ताने गुंणतो.

   (iii) एका अपूर्णांकाने दुसऱ्या अपूर्णांकाला भागतांना आपण पहिल्या अपूर्णांकाने दुसऱ्या अपूर्णांकाच्या गुणाकारव्यस्ताला गुणतो. उदा. $\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$.

7. दोन दशांश अपूर्णांकाचा गुणाकार आपण शिकलो दोन दशांश अपूर्णांकाचा गुणाकार

करतांना प्रथम आपण त्यांचा पूर्णांक संख्येप्रमाणे गुणाकार करतो दोन्ही दशांश संख्येतील दशांश चिन्हाच्या उजवीकडील अंक मोजतो शेवटी आलेल्या गुणाकारात उजवीकडुन अंक मोजुन दशांश चिन्ह देतो.

8. दंशांश अपूर्णांकाला 10, 100, 1000 इत्यादीने गुणने गुणाकारातील संख्येत दशांशचिन्ह देतांना एकवर जेवढी शुन्ये आहेत तेवढी स्थाने उजवीकडे सरकवून दशांशचिन्ह देतात.

9. दशांश अपूर्णांकाच्या भागाकार आपण शिकला.

   (i) पूर्णांक संख्येला दशांश अपूर्णांकाने भागतांना आपण प्रथम त्यांचा पूर्णांक संख्येप्रमाणे भागाकार करतो नंतर आपण आलेल्या भागाकारात दशांश अपूर्णांकात असलेल्या दशांश चिन्हाप्रमाणे दशांश चिन्ह दिले देतो.

   आपण असेच गुणाकार करत आहोत ज्यामध्ये शून्य आहे.

   (ii) दशांश अपूर्णांकाला 10, 100 ,1000 किंवा 10 च्या पटीतील संख्येने भागतांना आपण 10, 100, 1000 या संख्येमध्ये असलेल्या शून्याऐवढी स्थाने डावीकडे सोडून दशांश चिन्ह देतो.

   (iii) दोन दशांश अपूर्णांकाच्या भागाकार करतांना प्रथम दोन्ही अपूर्णांकातील दशांश चिन्ह योग्य प्रमाणात उजवीकडे सरकवा जेणेकरून विभाजक पूर्णांक संख्या येईल.

10. परिमेय संख्या हा संख्यांचा मोठा समूह आहे ज्यामध्ये पूर्णांक संख्या सर्व धनअपूर्णांक संख्या आणि सर्व ऋण अपूर्णांकाचा समावेश होतो.. या सर्वांमध्ये आपल्याला दोन पूर्णांकाचे गुणोत्तर $\frac{p}{q}$ परिमेय संख्या दर्शविते.

    यामध्ये i) p, q हे पूर्णांक आहेत आणि

    ii) $q \neq 0$

    परिमेय संख्यांचा संच Q या अक्षराने दाखवितात.

जॉन नेपिअर (स्कॉटलॅण्ड)

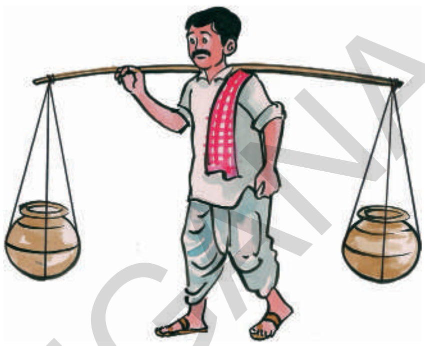
1550–1617 इ.स.

गणितातील लॉगरिथमचा शोध गणितातील नेपिअरची गुणाकारपद्धती आणि दशांशाची गुणाकार पद्धती याचा शोध लावला.

साधी समिकरणे

3

3.0 ओळख



इयत्ता 6 वीत आपण $4x = 44$, $2m = 10$ अशा प्रकारची सोपी समिकरणे आणि त्यांची उकल बघीतलेली आहे., ही समिकरणे आपणास कोडे सोडविण्यासाठी आणि दैंनंदिन जीवनातील समस्या सोडविण्यासाठीकशी मदत करतात हेही आपण पाहीले आहेत, यासाठी आपण खालिल उदाहरणाचा अभ्यास करूया

स्वाध्याय 1

1. समिकरणाच्या डाव्या आणि उजव्या बाजू लिहा

(i) $2x = 10$ (ii) $2x–3 = 9$

(iii) $4z + 1 = 8$ (iv) $5p + 3 = 2p + 9$

(v) $14 = 27 – y$ (vi) $2a – 3 = 5$

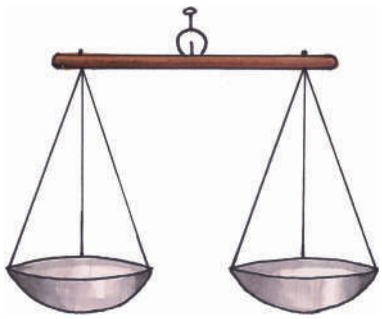
(vii) $7m = 14$ (viii) $8 = q + 5$

2. प्रयोग व प्रमाद या पध्दतीने खालिल समिकरणे सोडवा

(i) $2 + y = 7$ (ii) $a – 2 = 6$

(iii) $5m = 15$ (iv) $2n = 14$

3.1 समीकरण वजन काटा



मागील इयत्तेत समान वजने घेऊन वजन काटयाच्या साह्याने वजन कसे करतात हे शिकलोत.

जर वजन काट्याच्या एका पारड्यात 5 kg व दुसऱ्या पारड्यात 2 kg वजन घेजल्यास काय होईल?

जर वजन काट्याच्या डाव्या पारड्यात 3 kg व उजव्या पारड्यात 7 kg घेतले तर काय होईल?

जर वजन काट्याच्या डाव्या पारड्यात 3 kg व उजव्या पारड्यात 3 kg घेतले तर काय होईल?

वजन काटा समतोल राहण्यासाठी दोन्ही बाजूची वजन काट्यातील वजने तंतोतंत समान असणे आवश्यक आहे.

समानतेचे हेच तत्व धारण केलेले असते

$12-2 = 6 + 4$ ही समानता लक्षात घ्या

येथे- डावी बाजू $= 12 - 2 = 10$ आणि

डजवी बाजू $= 6 + 4 = 10$

ज्याअर्थी दोन्ही बाजू समान आहे त्याअर्थी समानता धारण केली आहे.

जर आपण समीकरणाच्या दोन्ही बाजूत 3 मिळविले तर काय होईल? दोन्ही बाजूच्या किंमती समान राहतील काय? 10 मिळविल्यास काय होईल ? अशा वेगळ्या किंमती घेऊन प्रयत्न करा.

जर आपण समीकरणाच्या दोन्ही बाजूतून 5 वजा केले तर काय होईल? दोन्ही बाजूच्या किंमती समान राहतील काय?

जर आपण समीकरणाच्या दोन्ही बाजूतून 7 वजा केले तर काय होईल? दोन्ही बाजूच्या किंमती समान राहतील काय?

जर समिकरणाच्या दोन्ही बाजूस 6 ने गुणल्यास काय होईल? दोन्ही बाजू समान राहतील काय? तुमच्या पंसतीची संख्या घेवून तपासून पाहा जर 8 ह्व 8 केले तर काय होईल ?

जर समिकरणाच्या दोन्ही बाजूस 5 ने भागल्यासकाय होईल ? दोन्ही बाजू समान राहतील काय ? 2 ने भागल्यास काय होईल ?

वरील सर्व विधानांचे तुम्हाला **होय** हेच एक उत्तर मिळेल. एका समान संखेच्या साह्याने दोन्ही बाजूंना भागले, गुणले, बेरीज, वजाबाकी केली तर समीकरणात बदल होत नाही. समानतेचे हे तत्व आपणास पुढे समीकरणे सोडवताना लागू पडेल.

3.2 समिकरणे सोडविणे

प्रथम प्रयत्न व प्रमाद या पध्दतीने समिकरणे कसी सोडवावी हे पूर्वीच शिकलात. समिकरणे सोडविण्यासाठी प्रथम आपणास संख्यात्मक पदेही चलापासून/अज्ञातापासून वेगळी करावी लागतात.

समानतेच्या तत्वानूसार नंतर ती वेगळया बाजूंना दयावी. लागतात.

खाली दिलेले उदाहरण आपण अभ्यासू या.

उदा. 1 : सोडवा $x + 3 = 7$

दिलेले समीकरण

उकल : $x + 3 = 7$ .... (1)

समीकरणाची डावी बाजू $x + 3$ आहे.

डाव्या बाजूची एकुण किंमत x पेक्षा 3 ने मोठी आहे.

x ची किंमत काढण्यासाठी आपणास डाव्या बाजूतून 3 काढून टाकावे लागतील अशाप्रकारे डाव्या बाजूतून 3 वजा करावे लागतील समानता साधण्यासाठी जर डाव्या बाजूतून 3 वजा केले तर उजव्या बाजूतूनही 3 वजा करावे लागतील.

आपणास , $x + 3 = 7$

$x + 3 - 3 = 7 - 3$

$x = 7 - 3$ ..... (2)

$x = 4$

अशाप्रकारे, $x = 4$.

समीकरण 1 आणि 2 मधून हे स्पष्ट आहे की, डाव्याबाजूतून 3 काढून टाकणे हे उजव्या बाजूतून 3 वजा करण्याएवढेच आहे. याचाच अर्थ डाव्याबाजूतील +3 हे उजव्या बाजूस जाताना (रूपांतर) –3 होईल.

पडताळा : दिलेल्या समिकरणात 4 एवजी x ठेवा आणि डावीबाजू = उजवीबाजू आहे काय हे शोधा.

डावीबाजू = $x + 3$

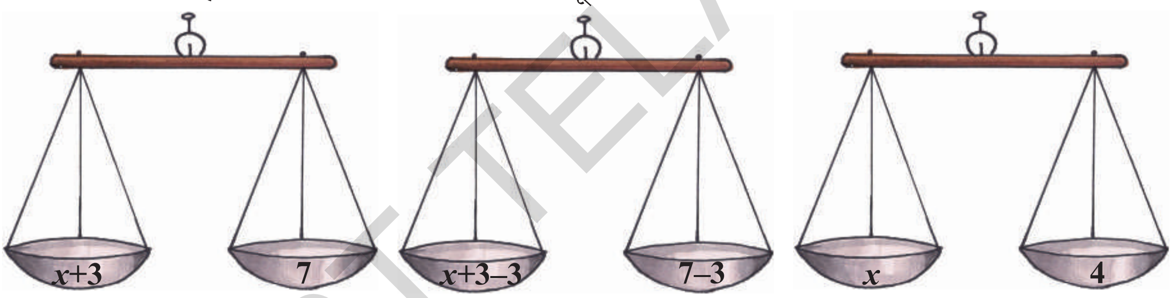
= $4 + 3$ (वजा करुन $x = 4$)

= 7

उजवीबाजू = 7

डावीबाजू= उजवीबाजू .

वजनकाटयाच्या साहाय्याने वरील उकली आपण समजावून घेऊ.



उदाहरण 2 : सोडवा y – 7 = 9

उकल : y – 7 = 9 .... (1)

येथे डाव्या बाजूचे समीकरण y – 7

म्हणून y ची किम्मत काढण्यासाठी आपण समिकरणाच्या दोन्ही बजूत 7 मिळवू.

म्हणून, y – 7 + 7 = 9 + 7

y = 9 + 7 .... (2)

y = 16

अशाप्रकारे, y = 16.

समीकरण 1 आणि समीकरण 2 मधून हे स्पष्ट आहे की, डाव्या बाजूतील –7 हे उजव्या बाजूत जाताना +7 होते.

पडताळा : $y = 16$ घेऊन डावीबाजू = उजवीबाजू बरोबर आहे काय हे तपासा.

उदाहरण 3 : सोडवा $5x = -30$

उकल : $5x = -30$ .... (1)

$\frac{5x}{5} = \frac{-30}{5}$ (दोन्ही बाजूंना 5 ने भागून)

$x = \frac{-30}{5}$ .... (2)

$\therefore x = -6$

समीकरण 1 आणि समीकरण 2 मधून हे स्पष्ट आहे की, डाव्या बाजूतील 5 हा गुणक उजव्या बाजूस स्थानांतर होताना भाजक होतो.

पडताळा: $x = -6$ ठेवा आणि डावीबाजू = उजवीबाजू आहे काय हे तपासा.

उदाहरण 4 : सोडवा $\frac{z}{6} = -3$

उकल : $\frac{z}{6} = -3$ .... (1)

$6\left(\frac{z}{6}\right) = 6 \times (-3)$ (दोन्ही बाजूंना 6 ने गुणने)

$z = 6 \times (-3)$ .... (2)

$\therefore \quad z = -18$

समीकरण 1 आणि समीकरण 2 मधून हे स्पष्ट आहे की, डाव्या बाजूतील 6 हा भाजक उजव्या बाजूस स्थानांतर होताना गुणक होतो.

पडताळा : $z = -18$ ठेवा आणि डावीबाजू = उजवीबाजू आहे काय हे तपासा.

उदाहरण 5 : सोडवा $3x + 5 = 5x - 11$

उकल : $3x + 5 = 5x - 11$

$3x + 5 - 5x = 5x - 11 - 5x$ (दोन्ही बाजूतून 5x वजा करून)

$-2x + 5 = -11$

$-2x + 5 - 5 = -11 - 5$ (दोन्ही बाजूतून 5 वजा करून)

$-2x = -16$

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-16}{-2}$ (दोन्ही बाजूस -2 भागून)

$\therefore x = 8$

पडताळा : x=8 ठेवून खालिल समिकरण तपासा

डावीबाजू $= 3x + 5 = 3(8) + 5 = 24 + 5 = 29$

उजवीबाजू $= 5x - 11 = 5(8) - 11 = 40 - 11 = 29$

$\therefore$ डावीबाजू = उजवीबाजू

अशा प्रकारे, डाव्या बाजूतून उजव्या बाजूमध्ये स्थानांतर होणाऱ्या पदामध्ये
'+ परिणाम(संख्या) असल्यास – परिमाण होते'
'– परिणाम असल्यास + परिमाण होते'
'× परिणाम असल्यास ÷ परिमाण होते'
'÷ परिणाम असल्यास × परिमाण होते.'

उदाहरण 6 : सोडवा $12 = x + 3$

उकल : येथे डाव्या बाजूतून उजव्या बाजूत 12 स्थानांतर केले तर -12 होतात. आणि जर $x+3$ उजव्या बाजूतून डाव्या बाजूत स्थानांतर केले तर $-x - 3$.

म्हणजेच $-x \ -3 = -12$

दोन्ही बाजूस -1 गुणून

$$-1\,(-x \ -3) = -1\,(-12)$$

$$x + 3 = 12$$

$$x = 12 - 3$$

$$\therefore\ x = 9$$

अशाप्रकारे, जर डावी बाजू आणि उजवी बाजू यांची समिकरणे एका बाजूकडून दुसऱ्या बाजूकडे स्थानातंर केली तर त्यांची किंमत समान राहतात.

सराव - 2

1. खालील समिकरणे पक्षांतर न करता सोडवा आणि तुमचे उत्तर पडताळा.

(i) $x + 5 = 9$ (ii) $y - 12 = -5$

(iii) $3x + 4 = 19$ (iv) $9z = 81$

(v) $3x + 8 = 5x + 2$ (vi) $5y + 10 = 4y - 10$

2. खालील समिकरणे पदांचे पक्षांतर करून सोडवा आणि तुमचे उत्तर पडताळा.

(i) $2 + y = 7$ (ii) $2a - 3 = 5$

(iii) $10 - q = 6$ (iv) $2t - 5 = 3$

(v) $14 = 27 - x$ (vi) $5\,(x+4) = 35$

(vii) $-3x = 15$ (viii) $5x - 3 = 3x - 5$

(ix) $3y + 4 = 5y - 4$ (x) $3\,(x - 3) = 5\,(2x + 1)$

3.3 दैनंदिन समस्या सोडविण्यासाठी बैजिक समिकरणांचा उपयोग.

खालील उदाहरणे बघा.

(i) एका वर्गातील एकुण मुलांची व मुलींची संख्या 52 आहे. जर मुलींची संख्या मुलांच्या संख्येपेक्षा 10 ने जास्त असेल तर मुलांची संख्या किती ?

(ii) रामूच्या वडिलाचे आजचे वय रामूच्या वयाच्या तिप्पट आहे. आणखी 5 वर्षांनंतर त्यांच्या वयाची बेरीज 70 वर्षे होईल. तर त्यांची आजची वये किती ?

(iii) एक पर्समध्ये 250 रूपये हे 10 रूपये आणि 50 रूपये अशा स्वरूपात आहेत. जर ₹ 10 च्या नोटांची संख्या ही ₹ 50 च्या नोटांपेक्षा 1 ने जास्त असेल तर प्रत्येक प्रकारच्या नोटांची संख्या किती ?

(iv) एका आयताची लांबी ही रूंदीच्या दुपटीपेक्षा 8 मी. ने कमी आहे. आयताची परिमीती 56 मी.आहे. तर आयताची लांबी व रूंदी किती ?

वरील दिलेल्या सर्वच समस्यांप्रमाणे, आपण दैनंदिन जीवनातील समस्या सोडविण्यासाठी ही साधी समिकरणे वापरू शकतो. हे करण्यासाठी आपण खालील टप्प्यांचे (पाय-यांचे) अनुसरण करू शकतो.

पायरी 1: समिकरण (समस्या) काळजीपुर्वक वाचा.

पायरी 2 : अज्ञाताची नोंद करा किंवा तुम्हाला आढळून आलेली संख्या (परिमाण) ज्यामध्ये x, y, z, u, v, w, p, t यासारखी काही अक्षरे असतील.

पायरी 3: परिमाणांमध्ये संबंध जुळवून दिलेली माहिती बैजिक समिकरणात लिहा.

पायरी 4: समिकरण सोडवा.

पायरी 5 : उकलीचा पडताळा करा.

उदाहरण 7 : एका वर्गातील एकुण मुलांची व मुलींची संख्या 52 आहे जर मुलींची संख्या मुलांच्या संख्येपेक्षा 10 ने जास्त असेल तर मुलांची संख्या किती ?

उकल : आपण मुलींची संख्या x समजू

मुलींची संख्या $x + 10$. असेल

मुलांची व मुलींची एकुण संख्या $= x + (x + 10)$

$= x + x + 10$

$= 2x + 10$

प्रश्नामध्ये दिल्यानुसार,मुलांची व मुलींची एकुण संख्या 52 आहे.

म्हणून, $2x + 10 = 52$

हे समिकरण सोडवून, $2x + 10 = 52$

$2x = 52 - 10$ (10 चे डावीकडून उजवीकडे पक्षांतर करून)

$2x= 42$

$x = \frac{42}{2}$ (2 चे डावीकडून उजवीकडे पक्षांतर करून)

$\therefore\ x = 21$

अशाप्रकारे, मुलांची संख्या = 21

आणि मुलींची संख्या = 21 + 10 = 31

पडताळा : 21 + 31 = 52 म्हणजेच, मुलांची व मुलींची एकुण संख्या 52 आहे.

आणि 31 – 21=10 म्हणजेच मुलांच्या संख्येपेक्षा मुलींची संख्या 10 ने जास्त आहे.

उदाहरण 8: रामूच्या वडिलाचे आजचे वय रामूच्या वयाच्या तिप्पट आहे आणखी 5 वर्षानंतर त्यांच्या वयाची बरिज 70 वर्षे असेल.तर त्याची आजची वये किती

उकल : समजा रामूचे आजचे वय = x वर्षे

वडिलांचे आजचे वय = $3x$ वर्षे

5 वर्षानंतर रामूचे वय = $x+5$ वर्षे

त्याच्या वडीलाचे वय = $3x + 5$ वर्षे

5 वर्षानंतर त्यांच्या वयाची बेरीज = $(x + 5) + (3x + 5) = 4x + 10$ वर्षे

उदाहरणात दिल्यानुसार त्याच्यावयाची बेरीज $4x + 10 = 70$

$$4x = 70 – 10$$

$$4x = 60$$

$$x = \frac{60}{4} = 15$$

अशाप्रकारे रामूचे आजचे वय = 15 वर्षे.

त्याच्या वडिलाचे आजचे वय = $3x = 3 \times 15$ वर्षे = 45 वर्षे.

पडताळा : 45 हे 15 च्या तिप्पट आहेत म्हणजे रामूच्या वडिलाचे वय रामूच्या वयाच्या तिप्पट आहे.

आणखी 5 वर्षांनंतर रामूचे वय = 15 + 5 = 20 वर्ष

आणि वडिलाचे वय = 45 + 5 = 50 वर्षे

दोघांच्या वयाची बेरीज 20 + 50 = 70 वर्षे

उदाहरण 9 : एका पर्समध्ये (पिशवीमध्ये) ₹ 10 च्या आणि ₹ 50 च्या अशा 500 रूपयांच्या नोटा आहे. ₹ 10 रूपयांच्या नोटांची संख्या ही ₹ 10 च्या नोटांपेक्षा 1 ने जास्त आहे. तर प्रत्येक प्रकारच्या नोटांची संख्या किती ?

उकल : समजा ₹.50 च्या नोटांची संख्या = x

$\therefore$ ₹.50 च्या नोटांची किंमत = $50x$

₹.10 च्या नोटांची संख्या = $x + 1$

₹.10 च्या नोटांची एकुण किंमत = 10 (x+1)

$\therefore$ पैशाची एकूण किंमत = 50x + 10 (x+1)

$= 50x + 10x + 10$

$= 60x + 10$

उदाहरणात दिल्यानुसार पर्समधील एकूण रक्कम ₹.250

म्हणून ,

$$60x + 10 = 250$$

$$60x = 250 - 10$$

$$60x = 240$$

$$x = \frac{240}{60}$$

$$\therefore x = 4$$

अशाप्रकारे ₹50 च्या नोटांची संख्या = 4

₹10 च्या नोटांची संख्या = 4 + 1 = 5

पडताळा : ₹10 च्या 5 नोटा ह्या ₹50 च्या 4 नोटापेक्षा 1 ने जास्त आहेत..

रूपयांची किंमत = (50×4) + (10×5)

= 200 + 50

= ₹. 250

उदा. 10: एका आयताची लांबी ही तिच्या रूदींच्या दुपटीपेक्षा 8 मी. ने कमी आहे जर आयताची परिमीती 56 मी. असेल तर आयताची लांबी व रूंदी किती ?

उकल : समजा, आयताची रूंदी = x मी.

रूंदीची दुप्पट = $2x$ मी.

म्हणून, आयताची लांबी = $(2x - 8)$ मी. (उदाहरणात दिल्याप्रमाणे)

आयताची परिमिती = 2 (लांबी +रूंदी)

अशाप्रकारे, परिमिती = $2\ (2x - 8 + x)$ मी.

= $2\ (3x - 8)$ मी.

= $(6x - 16)$ मी.

उदाहरणात दिल्याप्रमाणे आयताची परिमिती 56 मी.

म्हणून, $6x - 16 = 56$

$$6x = 56 + 16$$
$$6x = 72$$
$$x = \frac{72}{6}$$
$$\therefore \; x = 12$$

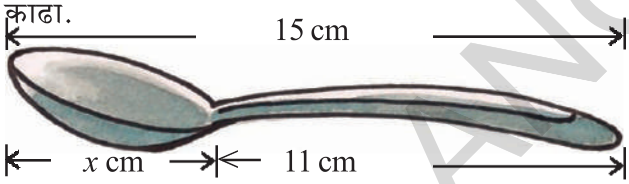
आयताची रूंदी $= 12$ मी.

आयताची लांबी $= 2 \times 12 - 8 = 16$ मी.

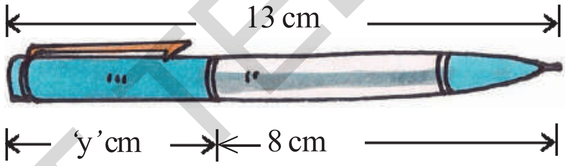
पडताळा : परिमिती $= 2\,(16 + 12) = 2 \times 28 = 56$ मी.

उदाहरणसंग्रह 3

1 चित्रामध्ये (आकृतीमध्ये) दिलेली माहिती समिकरणाच्या स्वरूपात लिहा. खालिल आकृतितील 'x'ची किंमत काढा.



2. आकृतीमध्ये दिलेली माहिती समीकरणाच्या स्वरूपात लिहा. खालिल आकृतीतील 'y' ची किंमत काढा.



3. एका संख्येपेक्षा दुपटीमध्ये 7 मिळविले असता उत्तर 49 येते. तर ती संख्या कोणती ?

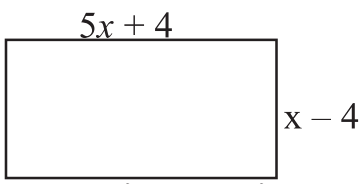
4. एका संख्येच्या तिपटीमधून 22 वजा केले असता उत्तर 68 येते तर ती संख्या कोणती ?

5. एका संख्येला 7 ने गुणून 3 वजा केले असता उत्तर 53 येते. तर ती संख्या कोणती ?

6. दोन संख्याची बेरीज 95 आहे. जर एक संख्या दुस-या संख्येपेक्षा 3 ने जास्त असेल तर त्या संख्या कोणत्या?

7. तीन क्रमवार पूर्णांकाची बेरीज 24 आहे तर ते पूर्णांक कोणते?

8. खाली दिलेल्या आयताची परिमिती 72 मी आहे. आयताची लांबी व रूंदी किती ?



9. एका आयताची लांबी रूंदीपेक्षा 4 मी ने जास्त आहे. जर आयताची परिमिती 84 मी असेल तर आयताची लांबी व रूंदी किती ?

10. हेमाचे 15 वर्षानंतरचे वय हे तिच्या आजच्या वयाच्या चौपट असेल तर तिचे आजचे वय किती ?

11. र 23000 ची रक्कम ही 63 बक्षिसांच्या रूपात देण्यात आली जर बक्षिसाची रक्कम ₹100 किंवा ₹25 असेल तर प्रत्येक प्रकारच्या बक्षिसांची संख्या किती ?

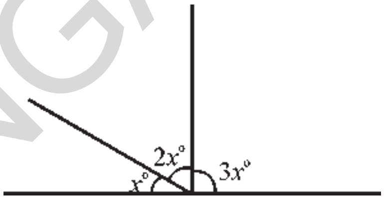
12. एका संख्येची विभागणी दोन भागात अशाप्रकारे करण्यात आली की, एक भाग हा दुसऱ्या भागापेक्षा 10 ने 5:3 असेल तर ती संख्या शोधा व ते दोन भाग शोधा

13. सुहाना म्हणाली, "माझ्या मनातील संख्येला 5 ने गुणले आणि त्यामध्ये 8 मिळविले तर उत्तर 20 मधुन माझ्या मनातील संख्या वजा केल्याएवढे येते. तर सुहानाच्या मनातील संख्या कोणती ?

14. शिक्षिकेने सांगितले की वर्गातील सर्वांत जास्त गुण प्राप्त विद्यार्थ्यांला वर्गातील सर्वात कमी गुण प्राप्त विद्यार्थ्यांच्या गुणाच्या दुपटीपेक्षा 7 गुण जास्त मिळाले. सर्वाधिक गुण 87 आहेत. तर सर्वात कमी गुण किती असतील.

15. सोबतच्या आकृतीत तयार झालेल्या प्रत्येक तीनही कोणाचे माप किती ?

(टिप: रेषेवरील बिंदूजवळ सर्व कोनांची बेरीज 1800 आहे.)



16. खालील कोडे सोडवा.

मी एक संख्या आहे.
माझी ओळख सांगा.
माझी दुप्पट करा.
आणि छत्तीस त्यामध्ये मिळवा
शतक होण्यासाठी
तुम्हाला अजूनही चार हवेत

पाठ्यावलोकन

- दैनंदिन जीवनातील निरनिराळ्या समस्या सोडविण्यासाठी ही साधी समीकरणे आपणास मदत करतात.
- समिकरणाचा समतोल साधण्यासाठी आपणास –
  (1) समिकरणाच्या दोन्ही बाजुमध्ये एकच समान संख्या मिळवा.
  (2) समिकरणाच्या दोन्ही बाजुतून एकच समान संख्या वजा करा.
  (3) समिकरणाच्या दोन्ही बाजुतून एकच समान संख्येने गुणा.
  (4) समिकरणाच्या दोन्ही बाजुतून एकच समान संख्येने भागा.
  जेणेकरून समानतेला बाधा पोहचणार नाही
- डावी बाजू आणि उजवीबाजू यांची अदलाबदल केली असता समिकरणात काहिही फरक पडत नाही.

रेषा आणि कोन

4

4.0 प्रस्तावना

कही भौमितीक संकल्पना तुम्ही या पुर्वीच्या कक्षेत शिकला आहात यापुर्वी जे शिकलात त्याबद्दल गंमतीदार गोष्टी पाहुया.

स्वाध्याय - 1

1. खालील आकृत्यांची नावे सांगा.

(i) (ii) (iii) (iv)

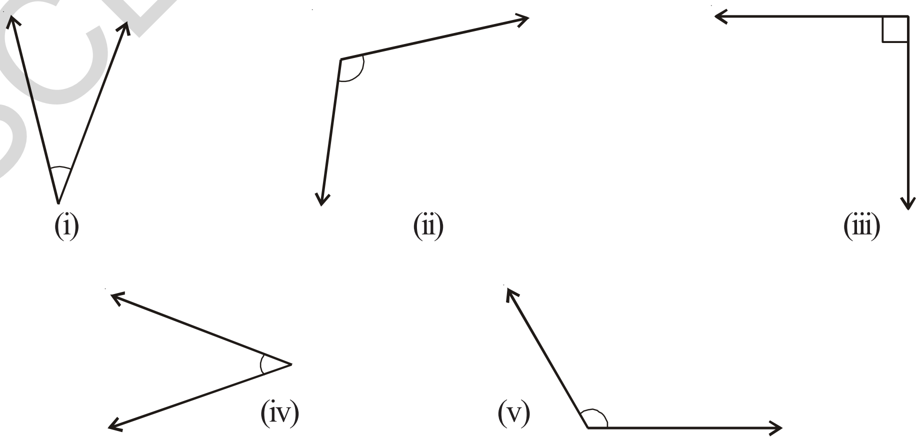
2. खालील सुचना ओळखून आकृती काढा.

(i) $\overrightarrow{OP}$ (ii) बिंदु X (iii) $\overleftrightarrow{RS}$ (iv) $\overline{CD}$

3. खालील आकृतीवरून रेषाखंडाची नावे लिहा.

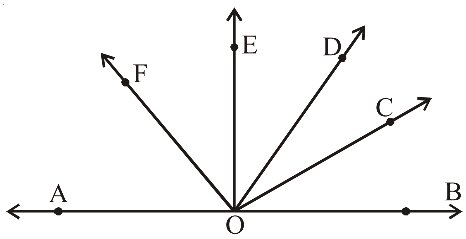
4. तुमच्या परिसराचे निरीक्षण करून कोणत्याही पाच कोनाची नावे लिहा.
उदा. कात्रीचे तोंड उघडल्यावर तयार होणारा कोन.

5. खालील कोनांपैकी लघुकोन, काटकोन व विशालकोन ओळखा.

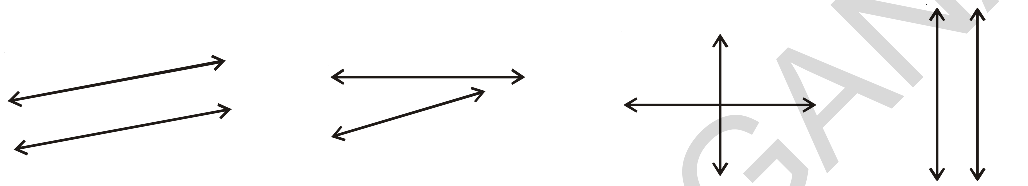


(i) (ii) (iii) (iv) (v)

6. आकृतीतील कोनांची नावे सांगा. लघुकोन काटकोन विशालकोन व सरळकोन कोणकोणते आहे.

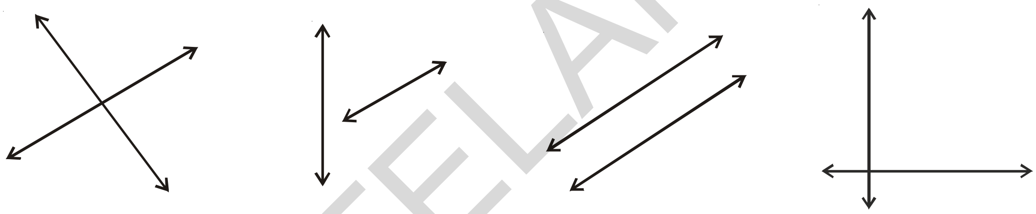


7. खालील पैकी समांतर रेषा कोणत्या ? का ?



(i) (ii) (iii) (iv)

8. खालील पैकी कोणत्या रेषा परस्परांना छेदत आहेत ?



(i) (ii) (iii) (iv)

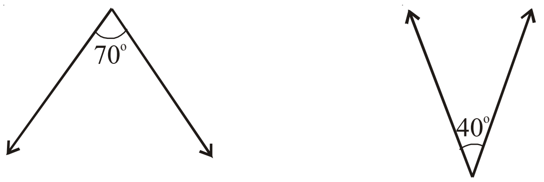
4.1 कोनांबद्दल आणखी काही.

आपण काही कोन कसे ओळखाये हे यापुर्वी शिकलो आहोत आता कोनांच्या विविध कोनाबद्दल माहिती घेऊ.

4.1.1 कोटिकोन

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 900 येते, त्यांना परस्परांचे कोटीकोन म्हणतात.

वरील कोन कोटिकोन आहेत कारण त्यांच्या मापांची बेरीज $30^0 + 60^0 = 90^0$.
आपण सांगू शकतो की 30^0 हा 60^0 चा आणि 60^0 हा 30^0 चा कोटिकोन आहे.

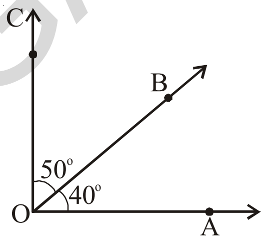


वरील आकृत्यांमध्ये दोन कोनांच्या मापांची बेरीज $70^0+40^0 \neq 90^0$ आहे. म्हणून हे कोन परस्परांचे कोटिकोन नाहीत.

सरावासाठी

कोटिकोनांच्या पाच जोड्या आकृतीसह दर्शवा.

हे करा

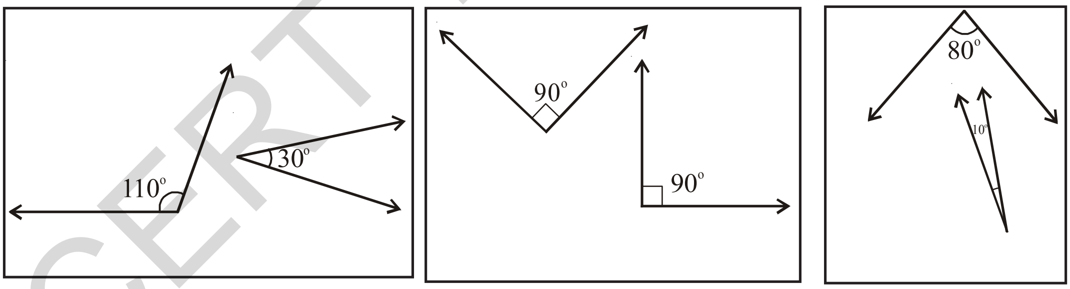


$\angle AOB = 40^0$ हा कोन काढा 0 याच शिरोबिंदुमधुन आकृतीत दर्शवल्याप्रमाणे किरण $\overrightarrow{OB}$ असा काढा. की, $\angle BOC = 50^0$ येईल.

या दोन्ही कोनाच्या मापाची बेरीज 90^0 येईल. व कोटकोन तयार होईल. अशीच 60^0 व 50^0 मापाची दुसरी जोडी घेईल हे दोन्ही कोन वरीलप्रमाणे जोडा. हे कोन परस्परांचे कोटीकोन आहेत का ? कारणासह स्पष्ट करा.

स्वाध्याय - 2

1. खालीलपैकी कोटीकोनाची जोडी ओळखा.



(i) (ii) (iii)

2. दिलेल्या कोनांचे कोटीकोन काढा.

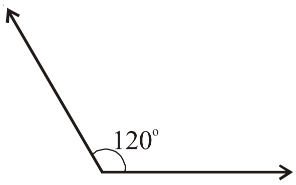
   (i) 25^0 (ii) 40^0 (iii) 89^0 (iv) 55^0

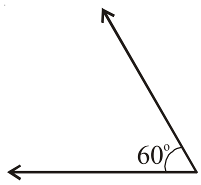
3. दोन कोन परस्परांचे कोटीकोन आहेत. व त्यांची मापे सारखीच आहेत ते कोन कोणते ?

4. मानस म्हणतो" कोटीकोनाच्या जोडीतील प्रत्येक कोन हा लघुकोन असतो" तुम्ही त्याच्याशी सहमत आहात का ? कारणासह स्पष्ट करा.

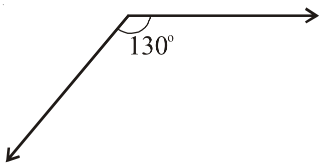
4.1.2 पुरक कोन

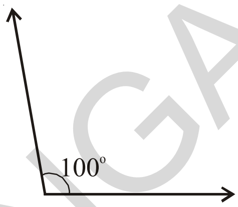
ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 असते. त्यांना परस्परांचे पुरक कोन असे म्हणतात.





वरील कोनांची मापांची बेरीज 180^0 येते म्हणून ते परस्परांचे पुरक कोन म्हणतात.
यावरून आपण असे म्हणु शकतो को 120^0 हा 60^0 चा व 60^0 हा 120^0 चा पुरक आहे.

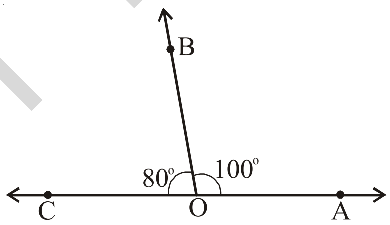




130^0 व 100^0 मापाचे हे कोन परस्परांचे पूरक कोन नाहीत का ? कारण सांगा ?

सरावासाठी

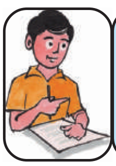
$\angle AOB = 100^0$ चा काढा. 0 या शिरोबिंदूतून किरण OB असा काढा.
की, $\angle BOC = 80^0$ आणि किरण $\overrightarrow{OB}$ हा दोन कोनांच्या सामाईक किरण असावा.



आकृतीचे निरीक्षण केल्यानंतर तुम्हाला दिसेल की, सरळ कोन 180^0 चा आहे.

म्हणून 100^0 व 80^0 हे दोन कोन परस्परांचे पूरक आहे.

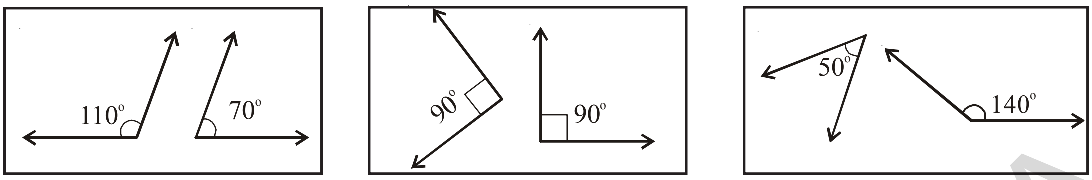
130^0 व 70^0 हे कोन परस्पर पुरक आहेत का ? कारणासह स्पष्ट करा.



सरावासाठी
कोणतेही पाच पुरक कोनांच्या जोड्या आकृतीत दर्शवा.

स्वाध्याय - 3

1. खालील पैकी पुरक कोनांच्या जोड्या कोणत्या.



(i) (ii) (iii)

2. खालील कोनांचे पूरक कोन कोणते ?

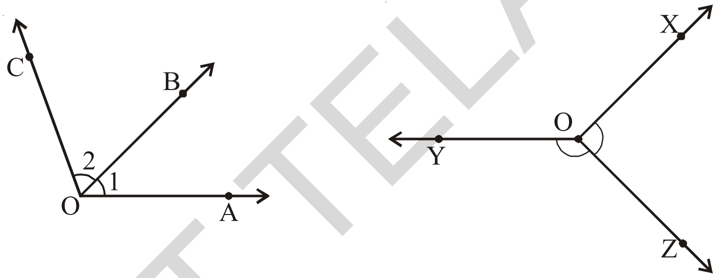
(i) 105^0 (ii) 95^0 (iii) 150^0 (iv) 20^0

3. दोन लघुकोन मिळून पुरक कोनाची जोडी तयार होत नाही विश्लेषण करा.

4. दोन कोन समान मापाचे असून परस्पर पूरक आहेत. ते कोन कोणते ?

4.1.3 संलग्न कोन

ज्या दोन कोनांचा एक शिरोबिंदू व एक भुजा सामाईक असते त्यांना संलग्न कोन म्हणतात.

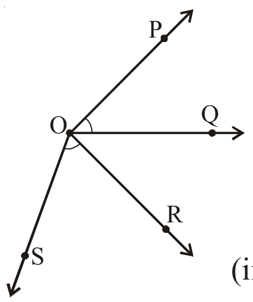


(i) (ii)

आकृती (i) मध्ये $\angle AOB$ व $\angle BOC$ हे संलग्न कोन आहेत. कारण शिरोबिंदू 'O' व $\overrightarrow{OB}$ हे सामाईक भुजा कोणती ?

आकृतीमध्ये (ii) मध्ये दर्शविलेले कोन संलग्न आहेत का ? सामाईक शिरोबिंदू व सामाईक भुजा कोणती ?

आता आकृती (iii) चे निरीक्षण करा

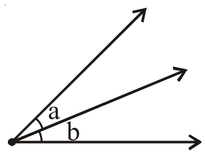


(iii).

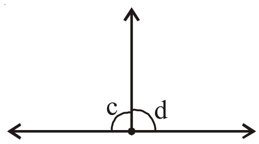
$\angle QOP$ व $\angle SOR$ हे संलग्न कोन आहेत का ? कारणासह स्पष्ट करा.

दिलेल्या आकृतीतील संलग्न कोन कोणते आहेत ? तुम्ही त्यांना संलग्न कोन का म्हणतात सकारण स्पष्ट करा.

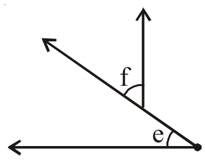
1. खालीलपैकी संलग्न कोन कोणते?



(i)

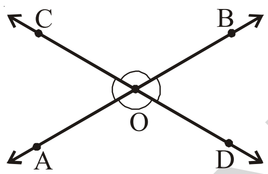


(ii)



(iii)

2. दिलेल्या आकृतीमधील संलग्न कोनांच्या जोड्या कोणत्या ? एकुण किती जोड्या आहेत ? नावासह जोड्या सांगा त्यांना संलग्न कोन का म्हणता येईल.



3. दोन संलग्न कोन पूरककोन होऊ शकतात का? आकृतीसह स्पष्ट करा.

4. दोन संलग्न कोन कोटीकोन होऊ शकतात का? आकृतीसह स्पष्ट करा

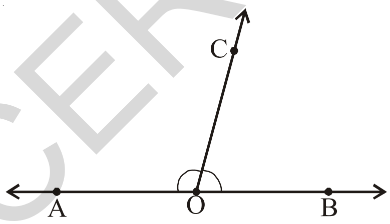
5. दैनंदिन निरीक्षणाद्वारे संलग्न कोनांचे वार उदाहरणे द्या/सांगा.

उदा. सायकलच्या चाकातील मध्यभागी असणाऱ्या काड्या

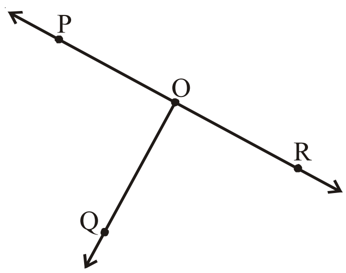
(i) ________________ (ii) ________________

(iii) ________________ (iv) ________________

4.1.3 (a) रेषीय जोडी



(i)



(ii)

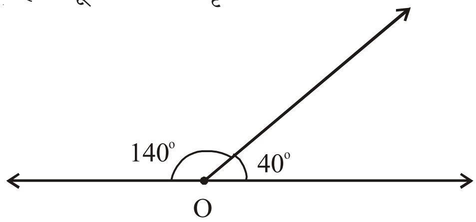
आकृती(i) पहा $\angle COA$ आणि $\angle BOC$ हे संलग्न कोन आहेत.त्यांच्या मापांची बेरीज किती येईल?

हे दोन कोन एकत्र येऊन एक सरळ कोन तयार होतो. त्याचप्रमाणे आकृती (ii) पहा $\angle QOR$ $\angle ROQ$ यांच्यापासून सरळ कोन बनतो का ?

संलग्न कोनांच्या जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180^0 येते, त्यांना रेषीय जोडीतील कोन किंवा रेषीय जोडी असे म्हणतात.

सरावासाठी

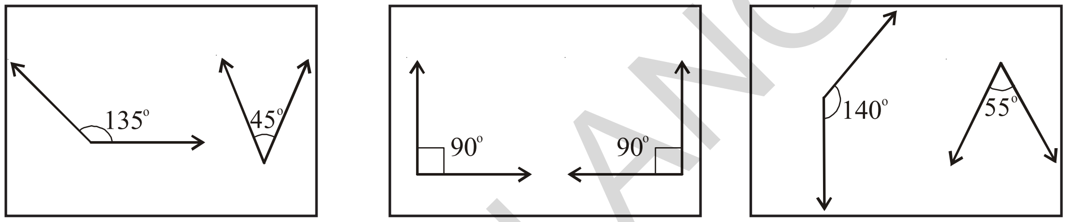
दोन संलग्न कोन 40^0 आणि 140^0 चे आहेत त्यांच्यापासून रेषीय जोडी तयार होईल का ? आकृती काढा व तपासून पहा रेणूने अशी आकृती काढली.



रेणून ही आकृती बरोबर काढली आहे का ? हे सलंम्न कोन रेषीय जोडी बनवू शकतात का ?

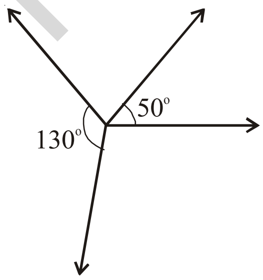
स्वाध्याय - 5

1. खाली दिलेल्या संलग्न कोनांच्या जोड्यांची आकृती काढा. यापैकी कोणती जोडी रेषीय जोडी आहे.



(i) (ii) (iii)

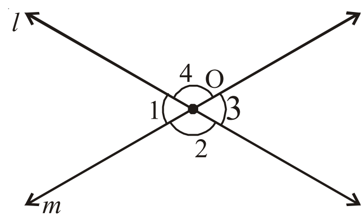
2. निहारीका ने 130^0 व 50^0 मापाचे दोन कोन काढले. व ती जोडी रेषीय जोडी होते का हे तपासले तिने खालीलप्रमाणे आकृती काढली.



सदरील कोन रेषीय जोडीतील कोन होतील का ? जर नाही तर निहारीका ची कोणती चूक झाली ? सकारण सांगा.

4.1.4 विरूद्ध कोन

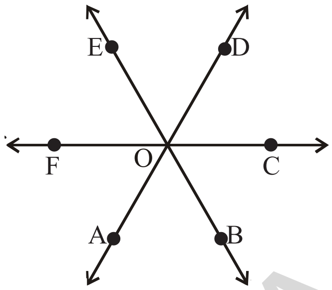
जेव्हा दोन रेषा परस्परांना छेदतात तेव्हा छेदानबिंदूच्या विरूद्ध बाजूला तयार होणारे कोन हे परस्पर विरूद्ध कोन असतात.



वरील आकृतीमध्ये रेषा 'l' व रेषा 'm' परस्परांना छेदतात. त्यांचा'O' हा छेदन बिंदू आहे.

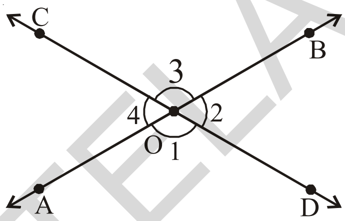
$\angle 1$ हा $\angle 3$ चा विरूद्ध कोन आहे तर $\angle 2$ हा $\angle 4$ चा विरूद्ध कोन आहे. आणि म्हणूनच $\angle 1$ व $\angle 3$ तसेच $\angle 2$ व $\angle 4$ या विरूद्ध कोनाच्या दोन जोड्या तयार होतात.

सदरील आकृती पाहून परस्परे विरूद्ध कोनांची नावे सांगा.



सरावासाठी

रेषा $\overleftrightarrow{AB}$ व रेषा $\overleftrightarrow{CD}$ अशा प्रकारे काढा की, त्यांचा छेदनबिंदू 'O'असेल खालील आकृती ट्रेसिंग पेपर वर ट्रेस करून काढा. ट्रेस केलेली आकृती खालील आकृतीवर अशा प्रकारे ठेवा की, $\angle COA$ व $\angle DOB$ येईल आता दोन्ही आकृत्यांचे नीट निरीक्षण करा. तुच्या लक्षात येईल की, $\angle AOD$ आणि $\angle BOC$ येईल. आता $\angle COA$ व $\angle DOB$.
दोन्ही आकृत्यांचे नीट निरीक्षण करा.
तुमच्या लक्षात येईल की $\angle AOD = \angle BOC$ आणि $\angle COA = \angle DOB$.

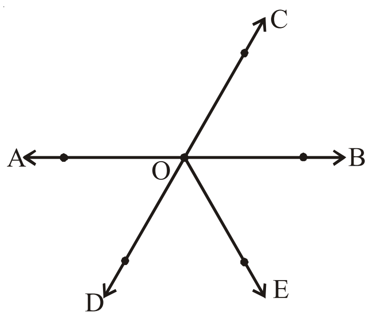


आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो की, विरूद्ध कोन सारखाच मापांचे असतात.

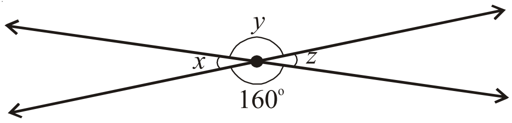
नोट - दोन स्ट्रॉ घ्या त्यांना मधोमध 'व' या बिंदुमध्ये अशा प्रकारे चिटकवा की, त्या स्ट्रॉ गोलाकार दिशेत फिरतील जेव्हा तुम्ही या स्ट्रॉ फिरवाल.परस्पर विरूद्ध कोन तयार होतील.

स्वाध्याय - 6

1. आकृती पाहून परस्पर विरूद्ध कोनांच्या दोन जोड्यांची नावे सांगा.



2. फक्त निरीक्षणावरून x, y व z चे माप सांगा.

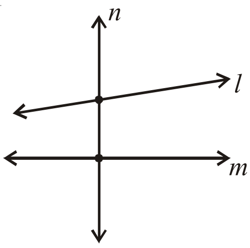


3. तुमच्या परिसरातील परस्पर विरूद्ध कोनांचे उदाहरणे सांगा.

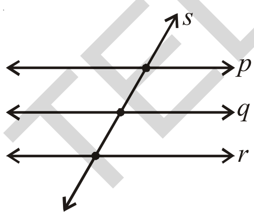
4.2 छेदिका

तुम्ही रेल्वेचा रूळ वर दोन रुळावर आडव्या पट्ट्यांनी छेदले तर त्याला आपण असे दर्शवु.

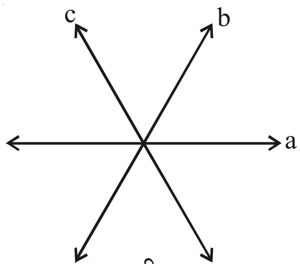
एक रेषा दुसऱ्या दोन किंवा अधिक रेषांना विशिष्ट (वेगवेगळ्या) बिदुमध्ये छेदते तेव्हा त्या रेषेला छेदिका म्हणतात.



आकृती (i)



आकृती (ii)



आकृती (iii)

आकृती (1) मध्ये रेषास 'l' व 'm' रेषा या रेषांना 'n' या रेषेने छेदले आहे.

म्हणून 'n' ही 'l' व 'm' ची छेदिका आहे.

आकृती (2) मध्ये रेषा 'p', 'q', 'r' या रेषांना 's' या रेषेने छेदले आहे

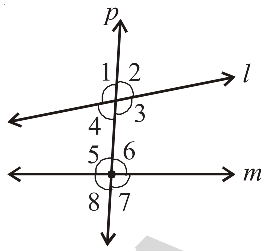
म्हणून 'n' ही 'l' व 'm' ची छेदिका आहे.

आकृती (3) मध्ये 'a' व 'b', 'c' या रेषा परस्परांना छेदतात. पण त्याच्या एकच एक सामाईक छेदन बिंदू आहे, म्हणून त्यापैकी कोणताही रेषा 'छेदिका' होणार नाही.

सरावासाठी

दोन रेषांना किती छेदिका काढता येईल ?

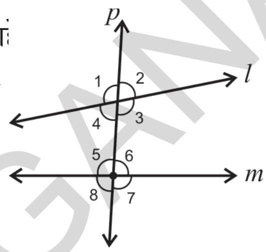
4.2.1 छेदिकेमुळे तयार होणारे कोन



छेदिका दोन रेषांना जेव्हा छेदते, 8 कोन तयार होतात कारण एका रेषेला छेदल्यास 4 कोन तयार होतात. आकृतीचे निरीक्षण करा

'l' व 'm' रेषांची 'p' ही छेदिका आहे. त्यामुळ $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7$ आणि $\angle 8$ हे कोन तयार होतात.

कोन $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ आणि $\angle 6$ हे '*l*' व '*m*' च्या आतील बाजूस आहेत. म्हणून त्यांना आंतर कोन म्हणतात.



तर $\angle 1, \angle 2, \angle 7$ आणि $\angle 8$ हे '*l*' व 'm' च्या बाहेरील बाजूस आ

म्हणून त्यांना बाह्य कोन म्हणतात. आपण विरूद्ध कोन ही संकल्पना व ते समान असतात. हे ही आपणांस माहीत आहे.

आता काळजीपूर्व आकृती पाहा.

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ आणि $\angle 8$ बाह्यकोन आहेत.

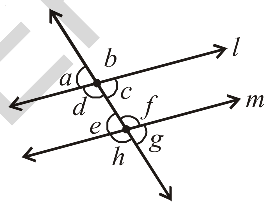
$\angle 3, \angle 4, \angle 5$ आणि $\angle 6$ आंतरकोन आहेत.

उभ्या विरुद्ध कोनांबद्दल आपण शिकलो आहोत आणि ते समान असतात ही वस्तुस्थिती आहे. रेणूने उभा विरुध्द कोनासाठीची आकृती पाहीली आणि $\angle 1 = \angle 3$ व $\angle 2 = \angle 4$ या जोड्या सांगितल्या. विरूध्द कोनांच्या आणखी दोन जोड्या सांगा रेणू म्हणाली की, प्रत्येक बाह्यकोन व त्याचा विरूद्ध कोन हा आंतरकोन आहे या जोडीतील कोन समान मापाचे आहेत तुम्ही रेणूसोबत सहमत आहात का?

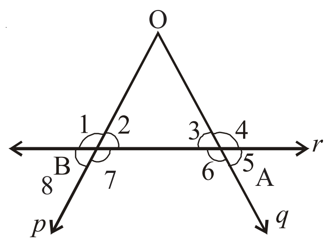
सरावासाठी

1. आकृती (1)व (2) मध्ये छेदिका ओळखा.

आंतरकोन व बाह्यकोन ओळखा खालील तक्ता पुर्ण करा.



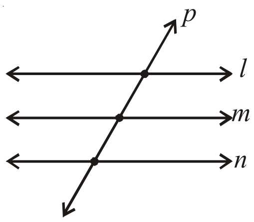
आकृती (i)

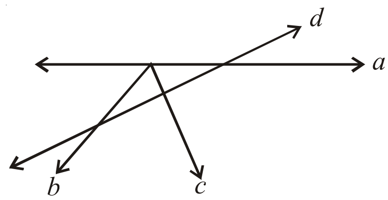


आकृती (ii)

आकृती	छेदिका	बाह्यकोन	आंतरकोन
(i)			
(ii)			

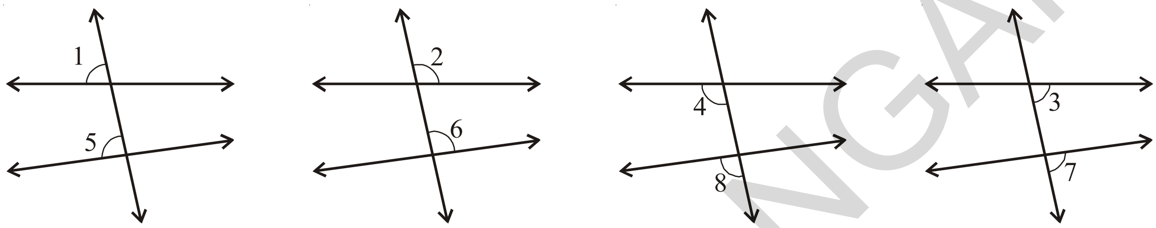
2. खालील आकृती पहा कोणती रेषा छेदिका आहे ? आकृतीतील सर्व कोनांना क्रमांक देऊन त्यांची नावे सांगा? आंतरकोन व बाह्यकोनांची नावे सांगा.





4.2.1 (a) संगत कोन

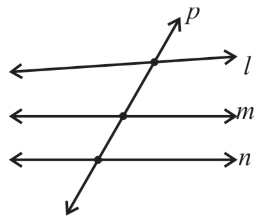
खालील आकृती (i), (ii), (iii) व (iv) पहा.-



(i) (ii) (iii) (iv)

($\angle 1, \angle 5$), ($\angle 2, \angle 6$), ($\angle 4, \angle 8$), ($\angle 3, \angle 7$) या सर्व कोनांच्या जोड्या पहा. त्यांच्यामध्ये काही साम्य आढळून येते का ? हे सर्व कोन छेदिकेच्या एकाच बाजूला असून, आंतरकोनाची जोडी तशीच बाह्यकोनाची जोडी ही आहे. प्रत्येक जोडीमध्ये आंतरकोन आहेत तशीच बाह्यकोनाची मिळून ही जोडी आहे.

वर सांगितलेली प्रत्येक जोडीला संगत कोन असे म्हणतात.



जेव्हा तीन रेषांना एकाच छेदिकेने छेदले तेव्हा काय आढळून येईल?

अशा वेळी संगत कोन कोणते आहेत.?

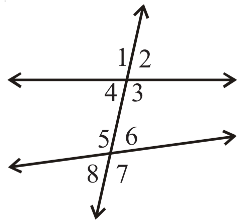
एकुण किती आंतरकोन व बाह्यकोन तयार होतील.?

जेव्हा एकाच छेदिकेने 4 किंवा 5 रेषांना छेदले, तर काय होईल ?

अशा वेळी तुम्ही आंतरकोन, बाह्यकोन व संगतकोन यांची संख्या सांगू शकतात.

4.2.1 (b) आंतर व बाह्यव्युत्क्रम कोन

सदरील आकृतीचे निरीक्षण करा. खालील तीन लक्षणे असणारा कोन कोणता आहे ते सांगा.

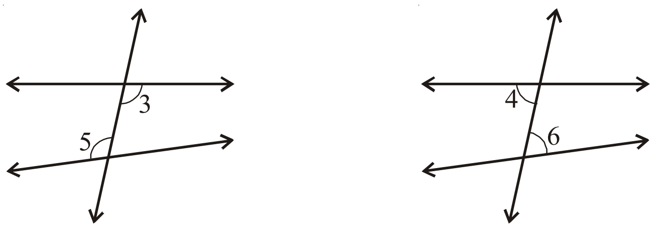


(i) शिरोबिंदू वेगवेगळे आहेत.

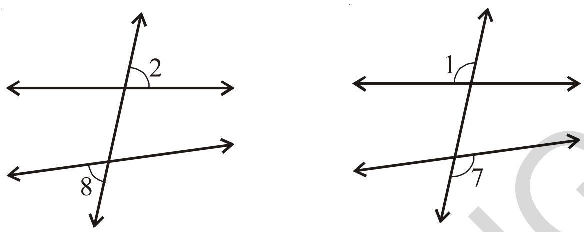
(ii) छेदिकेच्या विरूद्ध बाजूला आहेत.

(iii) दोन रेषेंच्या मध्ये आहेत (आंतरकोन आहेत.)

अशा कोनांच्या जोड्यांना आंतर व्युत्क्रम कोन म्हणतात.



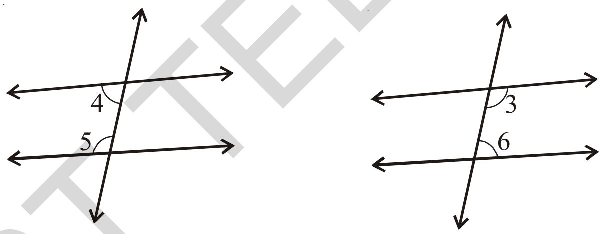
वरील आकृतीमध्ये ($\angle 3$, $\angle 5$) आणि ($\angle 4$, $\angle 6$) या दोन कोनांच्या जोड्यांना आंतरव्युत्क्रम कोन म्हणतात. त्याचप्रमाणे बाह्यव्युत्क्रम कोन सुद्धा ओळखता येतील.



($\angle 2$, $\angle 8$) आणि ($\angle 1$, $\angle 7$) कोनाच्या जोड्यांना बाह्यव्युत्क्रम कोन म्हणतात.

4.2.1 (c) छेदिकेच्या एकाच बाजूला असणारे आंतरकोन

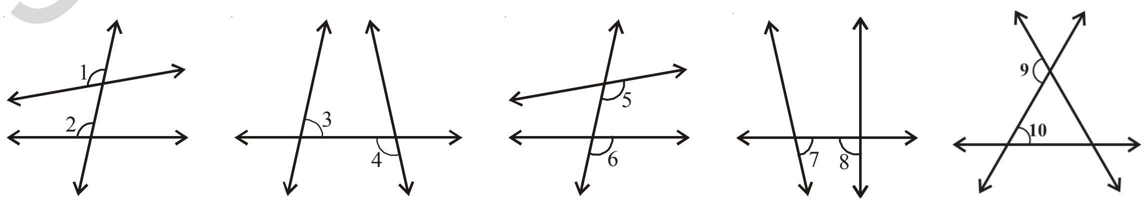
आंतरकोन छेदिकेच्या एकाच बाजूला देखील असतात.



$\angle 4$, $\angle 5$ आणि $\angle 3$, $\angle 6$ या छेदिकेच्या एकाच बाजुला असणा-या आंतरकोनाच्या दोन जोड्या आहेत.

सरावासाठी

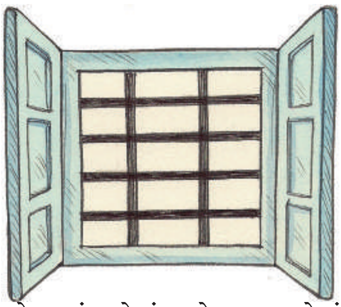
1. आकृतीचे निरीक्षण करून कोनाच्या जोड्यांची नावे सांगा.

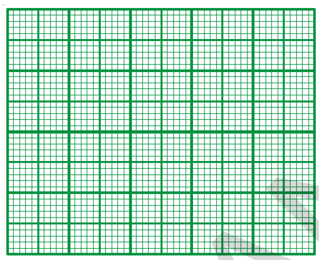


(i) (ii) (iii) (iv) (v)

4.2.2 समांतर रेषावरील छेदिका

तुम्हाला माहित आहे की, एकाच प्रतलातील परस्परांना न छेदणाऱ्या रेषांना समांतर रेषा म्हणतात. आता आपण समांतर रेषेवरील छेदिका आणि त्यांचे कोन या खिडकी आणि आलेख कागदाचे चित्र पहा.

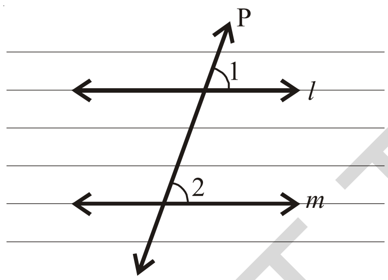




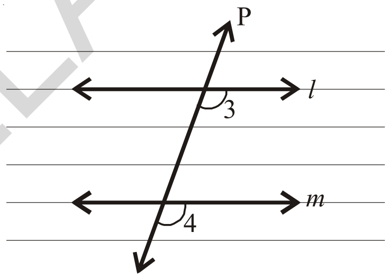
अशा प्रकारे समांतर रेषांना छेदणा-या रेषांचे उदाहरण देता येईल.

सरावासाठी

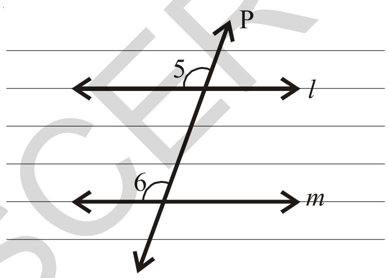
तुमच्या वहीवर रेषा 'l' व रेषा 'm' परस्पर समांतर काढा.
($l \parallel m$) व त्यांचे 'p' ही छेदिका काढा.
आकृती (i), (ii), (iii) व (iv) मध्ये दाखवल्या प्रमाणे संगत कोनांना नावे दया.



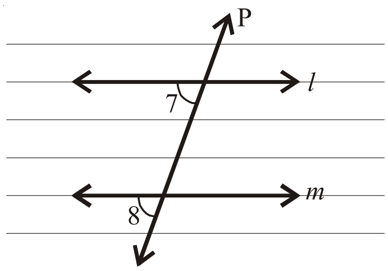
आकृती (i)



आकृती (ii)



आकृती (iii)



आकृती (iv)

ट्रेसिंग पेपरवर आ.क्र. (1) ट्रेस कटा(गिरवून काढा.) ट्रेस पेपर आ.क्र. (1) वर असा ठेवा की, 'l' रेषेवर ट्रेस पेपरवरील 'm' ही रेषा येईल. तुम्ही पहाल की, ट्रेस पेपरवरील $\angle 1$ हा आ.क्र. $\angle 2$ वर बरोबर येईल.

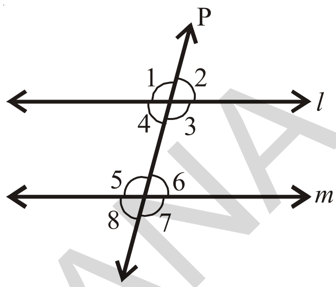
म्हणून $\angle 1 = \angle 2$

याचप्रकारे इतर जोड्या देखील समान मापाच्या आहेत का ते तपासून पाहा.

तुम्हाला समजून येईल की, दोन समांतर रेषांना छेदिकेने छेदल्यास तयार होणारे संगत कोन समान मापाचे असतात.

आपण हाच 'संगत कोनांचा नियम' दुसरा परिणाम मिळवण्यासाठी ही वापरू शकतो.

सदरील आकृतीमध्ये रेषा 'l' आणि 'm' या समांतर आहेत. व 'p' ही त्यांची छेदिका आहे.



संगत कोनांच्या जोड्या समान आहेत.

म्हणून,

$\angle 1 = \angle 5$

पण $\angle 1 = \angle 3$ (परस्परविरूद्ध कोन)

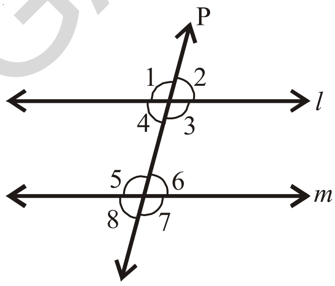
म्हणून, $\angle 3 = \angle 5$

त्याच प्रमाणे तुम्ही सांगू शकता, $\angle 4 = \angle 6$.

म्हणून जर दोन समांतर रेषांना छेदिकेने छेदले असता,

प्रत्येक जोडीतील (आंतरव्युत्क्रम कोनाच्या) कोन समान असतात.

हाच नियम बाह्यव्युत्क्रम कोनांसाठी लागू होतो का? प्रयत्न करून पहा.



आता, आपण छेदिकेच्या एकाच बाजुला तयार होणाऱ्या आंतर कोनांबद्दल आणखी एक गमतीदार गोष्ट पाहूया.

बाजुच्या आकृतीमध्ये 'l' आणि 'm' हा परस्पर समांतर रेषा आहेत. व 'p' ही त्यांची छेदिका आहे.

$\angle 3 = \angle 5$ (आंतरव्युत्क्रम कोन)

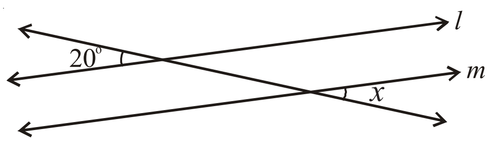
परंतू $\angle 3 + \angle 4 = 180^0$ (का ?)

म्हणून, $\angle 4 + \angle 5 = 180^0$

तसेच $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$ (कारण सांगा)

म्हणून, समांतर रेषांना छेदिकेने छेदले असता, आंतरकोनाच्या (छेदिकेच्या एकाच बाजूला असणाऱ्या) प्रत्येक जोडीतील कोन हा पुरक कोन असतो.

उदाहरण 1 : खालील आकृतीत 'l' व 'm' या समांतर रेषा आहेत व 'p' ही छेदिका तर 'x'चे माप शोधा.

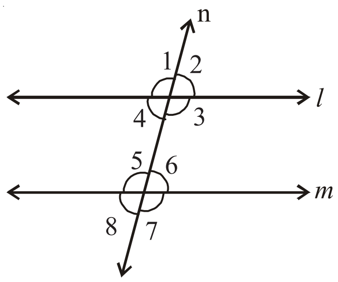


उकल : रेषा $l \parallel$ रेषा m व p ही छेदिका आहे. $\angle x$ आणि 20^0 ही बाह्य व्युत्क्रम कोनांची जोडी आहे.

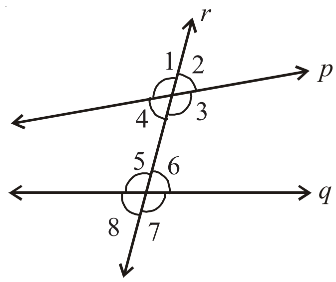
म्हणून त्यांचे माप समान आहे.

म्हणून, $\angle x = 20^0$.

सरावासाठी



आकृती (i)



आकृती (ii)

हे कोन तुमच्या वहीत गिरवून काढा. व कोनमापकाच्या साह्याने कोन मोजून तक्ता पूर्ण करा.

तक्ता 1 : संगतकोनाचे माप योग्य ठिकाणी भरा.

आकृती	संगतकोनाची जोडी			
	1 जोडी	2 जोडी	3 जोडी	4 जोडी
(i)	$\angle 1$= ………	$\angle 2$ = ………	$\angle 3$ = ………	$\angle 4$ = ………
	$\angle 5$ = ………	$\angle 6$ = ………	$\angle 7$ = ………	$\angle 8$ = ………
(ii)	$\angle 1$ = ………	$\angle 2$ = ………	$\angle 3$ = ………	$\angle 4$ = ………
	$\angle 5$ = ………	$\angle 6$ = ………	$\angle 7$ = ………	$\angle 8$ = ………

कोणत्या आकृतीमध्ये संगत कोनांची जोडी समान मापाची आहे ?

रेषा 'l' व रेषा 'm' यांच्या बद्दल तुम्ही काय सांगाल ?

रेषा 'p' आणि रेषा 'q' बद्दल तुम्ही काय सांगाल ?

रेषांची कोणती जोडी समांतर आहे ?

म्हणून, जेव्हा छेदिका दोन रेषांना छेदते व संगतकोन समान असतात तेव्हा, त्या रंषा समांतर असतात.

तक्ता **2 :** आंतरव्युत्क्रम कोनांचा तक्ता पूर्ण करा.

आकृती	आंतरव्युत्क्रम कोनांची जोडी	
	1 जोडी	2 जोडी
(i)	$\angle 3 =$ .... $\angle 5 =$	$\angle 4 =$ .... $\angle 6 =$ ....
(ii)	$\angle 3 =$ .... $\angle 5 =$	$\angle 4 =$ .... $\angle 6 =$ ....

आंतरव्युत्क्रम कोनांची कोणती जोडी समान आहे?

'l' व 'm' या रेषांबद्दल काय म्हणाल ?

'p' व 'q' रेषांबद्दल काय म्हणाल ?

म्हणून, दोन रेषा एका छेदिकेने छेदल्यास आंतरव्यत्क्रम कोन समान मापाचे असल्यास त्या रेषा समांतर असतात.

तक्ता 3 : छेदिकेच्या एकाच बाजुला असणा-या आंतरकोनाचे माप लिहून तक्ता पुर्ण करा.

आकृती	आंतरव्युत्क्रम कोनांची जोडी			
	1 जोडी		2 जोडी	
(i)	$\angle 3=$ .... $\angle 6=$	$\angle 3+\angle 6 =$	$\angle 4=$ .... $\angle 5=$	$\angle 4+\angle 5=$ ....
(ii)	$\angle 3=$ .... $\angle 6=$	$\angle 3+\angle 6 =$	$\angle 4=$ .... $\angle 5=$	$\angle 4+\angle 5=$ ....

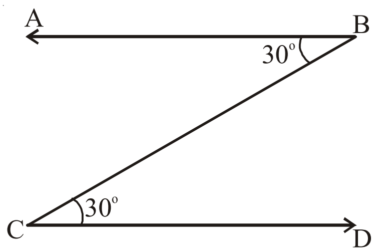
कोनाच्या आकृतीमध्ये छेदिकेच्या एकाच बाजूला असणा-या आंतरकोनाच्या जोडी परस्पर पूरक आहे (बेरीज 180^0 आहे)?

'l' व 'm' बद्दल तुम्ही काय सांगाल ?

'p' व 'q' बद्दल तुम्ही काय सांगाल ?

म्हणून दोन रेषांना एका छेदिकेने छेदले असता छेदिकेच्या एकाच बाजुला असणा-या आंतर कोनांची बेरीज 180^0 असेल तर त्या दोन रेषा समांतर असतात.

उदाहरण 2 : आकृतीमध्ये दोन कोन प्रत्येकी 30^0 मापाचे दर्शवलेले आहेत.
तर AB || CD हे सत्य आहे का ?



उकल : आकृतीत दर्शविलेले दोन कोन म्हणजे आंतरव्युत्क्रम कोनांची जोडी आहे. येथे ही $\overline{BC}$ छेदिका आहे.

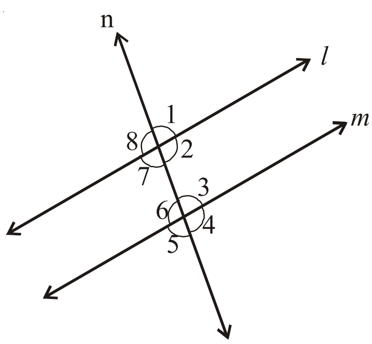
As the angles are equal, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

स्वाध्याय - 7

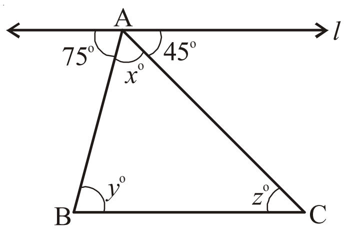
1. रिकाम्या जागा भरा.-
   (i) दोन किंवा अधिक रेषांना भिन्न बिंदूमध्ये छेदणाऱ्या रेषेला __________ म्हणतात.
   (ii) जर आंतर व्युत्क्रम कोन समान असतील तर त्या रेषा ______________ असतात.
   (iii) छेदिकेच्या एकाच बाजूला असणारे आंतर कोन परस्पर पूरक असतील तर त्या रेषा ____________ असतात.
   (iv) दोन रेषा परस्परांना ______________ बिंदूत छेदतात. (दोन रेषा परस्परांना छेदल्यास त्यांच्या सामार्दक बिंदूंची संख्या)

2. सदरील आकृती मध्ये 'l' व 'm' या समांतर रेषा असून 'n' ही त्यांची छेदिका आहे तर खालील रिकाम्या जागा भरा.-

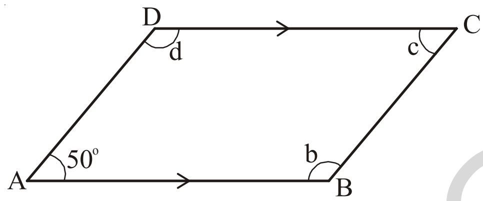
   (i) जर $\angle 1 = 80^0$ तर $\angle 2 =$ ______________
   (ii) जर $\angle 3 = 45^0$ तर $\angle 7 =$ ______________
   (iii) जर $\angle 2 = 90^0$ तर $\angle 8 =$ ______________
   (iv) जर $\angle 4 = 100^0$ तर $\angle 8 =$ ______________



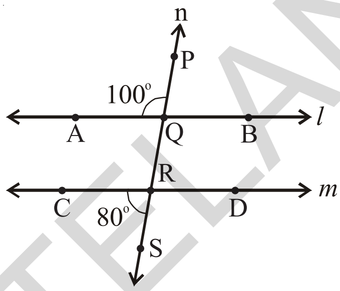
3. x, y आणि z चे माप शोधा, येथे $l \parallel BC$.



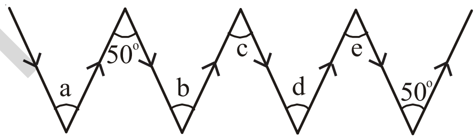
4. ABCD हा समांतरभूज चौकोन आहे. $AB \parallel DC$ आणि $AD \parallel BC$. $\angle b$, $\angle c$ व $\angle d$ शोधा.



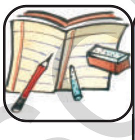
5. खालील आकृतीमध्ये 'l' आणि 'm' ची 'n' ही छेदिका आहे. तर 'l' व 'm' समांतर आहेत का ?



6. खालील आकृतीमध्ये $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ आणि $\angle e$ शोधा. कारणासह सांगा.



नोट: एकाच दिशेला दर्शविणारे दोन बाण समांतर रेषा सुचित करतात.



पाठ्यावलोकन

1. (i) जर दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90° असेल तर, त्यांना कोटीकोन म्हणतात.

   (ii) कोटीकोन जोडीतील प्रत्येक कोन लघूकोन असतो ?

2. (i) जर दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असेल तर, त्यांना परस्पराचे कोटीकोन म्हणतात.

   (ii) पूरक कोनाच्या जोडीतील प्रत्येक कोन लघूकोन,काटकोन किंवा विशालकोन असतो.

   (iii) दोन काटकोन परस्पर पूरक असतात.

3. एकाच भुजेच्या व एकाच छेदनबिंदूच्या दोन्ही बांजूना असणा-या कोनांना संलग्न कोन असे

म्हणतात.

4. पूरक कोनांची किंवा कोटीकोनांची जोडी संलग्न असेलच असे नाही.

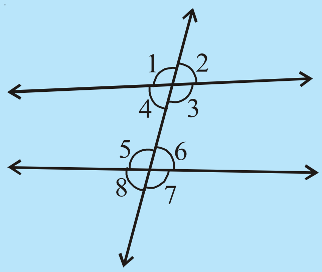
5. जे कोन संलग्न आहेत व परस्पर पूरक आहेत त्यांना रेषीय जोडीतील कोन म्हणतात.

6.(i) दोन रेषा परस्परांना एका छेदनबिंदू मध्ये छेदतात तेव्हा, परस्परांच्या विरूद्ध कोन असे म्हणतात.

(ii) विरूद्ध कोन समान मापाचे असतात.

7.(i) दोन रेषांना भिन्न बिंदूत छेदणा-या रेषेला छेदिका म्हणतात.

(ii) छेदिकेमुळे एकुण आठ कोन तयार होतात.



अ.क्र.	कोनांचा प्रकार	कोनांची जोड्या	कोन
1.	आंतर कोन	—-	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
2.	बाह्यकोन	—-	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
3.	विरूद्ध कोन	4 जोड्या	$(\angle 1, \angle 3)$; $(\angle 4, \angle 2)$; $(\angle 5, \angle 7)$; $(\angle 8, \angle 6)$
4.	संगत कोन	4 जोड्या	$(\angle 1, \angle 5)$; $(\angle 2, \angle 6)$; $(\angle 4, \angle 8)$; $(\angle 5, \angle 7)$
5.	आंतरव्युत्क्रम कोन	2 जोड्या	$(\angle 3, \angle 5)$; $(\angle 4, \angle 6)$
6.	बाह्य व्युत्क्रम कोन	2 जोड्या	$(\angle 1, \angle 7)$; $(\angle 2, \angle 8)$
7.	छेदिकेच्या एकाच बाजूचे आंतरकोन	2 जोड्या	$(\angle 3, \angle 6)$; $(\angle 4, \angle 5)$

8. दोन समांतर रेषांना छेदिका छेदते तेव्हा

(i) संगत कोनाची जोडी समान मापांची असते.

(ii) आंतरव्युत्क्रम कोनाची जोडी समान मापांची असते.

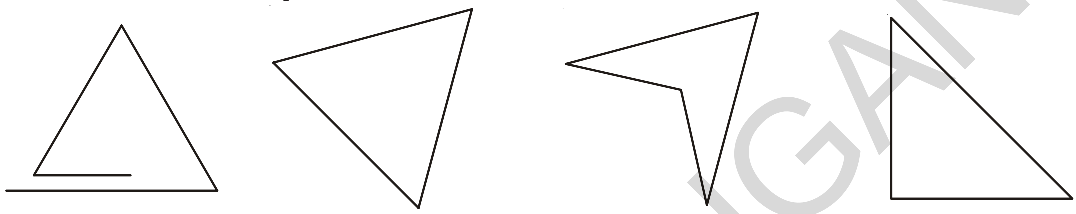
(iii) बाह्य व्युत्क्रम कोनांची जोडी समान मापांची असते.

(iv) छेदिकेच्या एकाच बाजूला असणा-या आंतरकोनाच्या जोडीतील कोन पूरक असतात.

त्रिकोण व त्रिकोणाचे गुणधर्म 5

5.0 प्रस्तावना :

मागील इयत्तेत तुम्ही त्रिकाणासंबंधी माहीती मिळविली आहे. खालील आकृतीचे निरिक्षण करा. या पैकीं कोणती आकृती त्रिकोणाची आहे.

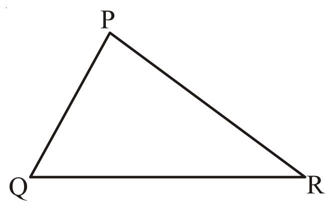


(i) (ii) (iii) (iv)

काही आकृत्याच त्रिकोणाच्या आहेत असे का ? या विषयी तुमच्या मित्रांशी चर्चा करा.

त्रिकोणाला तीन बाजू असतात.

आकृती ΔPQR, मध्ये,



(i) तीन बाज $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RP}$

(ii) तीन कोन $\angle PQR$, $\angle QRP$, $\angle RPQ$

(iii) तीन बिंदु P, Q, R

बिंदू P समोरील बाजू $\overline{QR}$ यावरून Q व Rबींदू समोरील बाजु सांगू शकाल का ?

जसे की,$\angle QPR$च्या समोरील बाजु $\overline{QR}$ आहेतर $\angle PQR$ समोरील बाजू कोणती ?

सरावासाठी

उमाच्या म्हणण्यावरून तीन बिंदूच्या साह्याने त्रिकोण काढता येतो. आपण सहमत आहात का? का?

आकृती काढून आपले उत्तर शोधा.

(तीन किंवा तीन पेक्षा जास्त बिंदू एकाच रेषेत असतील तर त्यांना एक रेषिय बिंदू म्हणतात.)

Note: LM = या रेषेची लांबी LM ; $\overline{LM}$ = रेख LM

$\overrightarrow{LM}$ = किरण LM ; $\overleftrightarrow{LM}$ = रेख LM

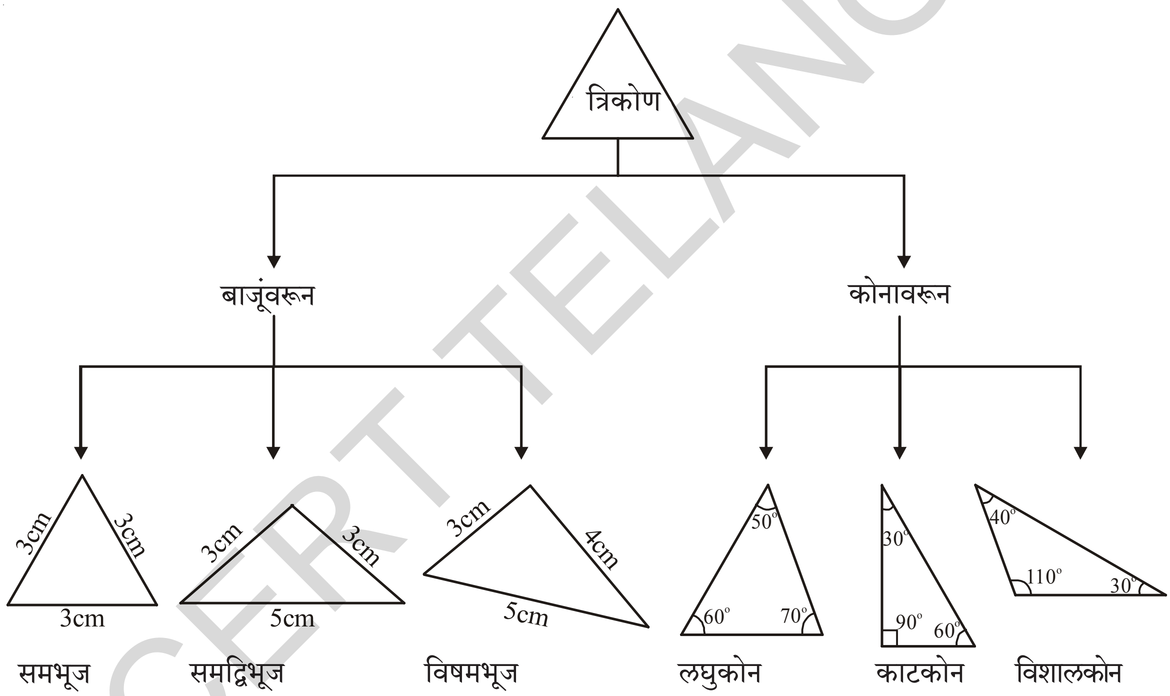
5.1 त्रिकोणाचे प्रकार

त्रिकोणाच्या गुणधर्मावरून (बाजू) यावरून त्रिकोणाचे तीन प्रकार पडतात.

- तीनही बाजू समान असणाऱ्या त्रिकोणाला समभुज त्रिकोण असे म्हणतात.
- दोन बाजू समान असणाऱ्या त्रिकोणाला समद्वीभुज त्रिकोण असे म्हणतात.
- तीनही बाजूची लांबी असमान असणाऱ्या त्रिकोणाला विषमभुज त्रिकोण असे म्हणतात.

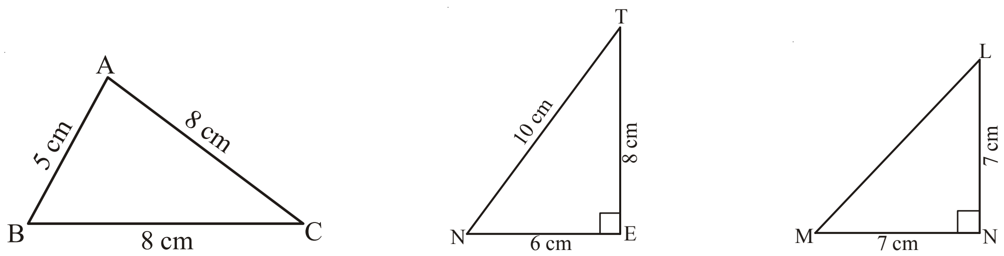
त्रिकोणाच्या गुणधर्मावरून (कोन) यावरून त्रिकोणाचे तीन प्रकार पडतात.

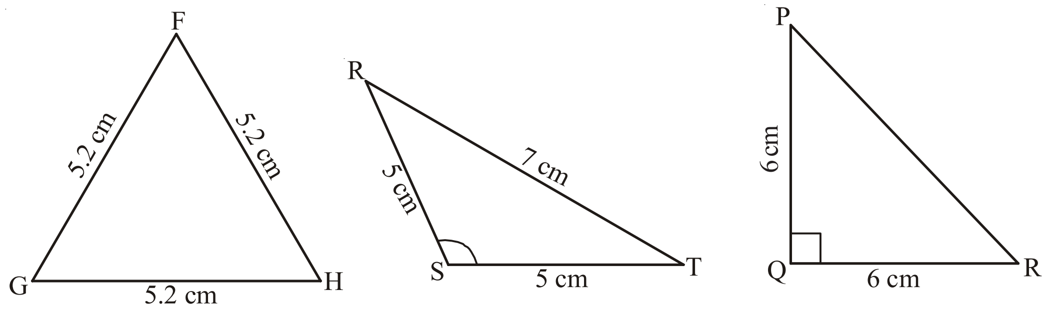
- तीनही कोन 90^0 पेक्षा लहान असणाऱ्या त्रिकोणाला लघुकोन त्रिकोण असे म्हणतात.
- तीनपैकी एक कोन 90^0 असेल त्यास काटकोन त्रिकोण असे म्हणतात.
- तीनपैकी एक कोन 90^0 पेक्षा जास्त असेल त्या विशालकोन त्रिकोण असे म्हणतात.



सरावासाठी

1. बाजू व कोनावरून खालील त्रिकोणाचे वर्गिकरण करा.





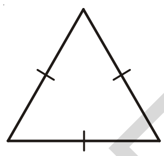
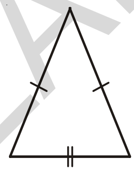
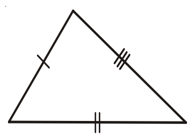
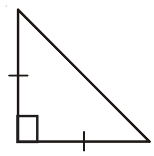
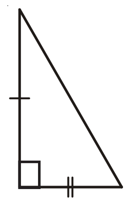
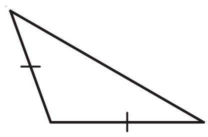
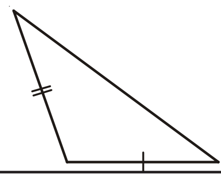
(2) ΔABC चे सहा घटक लिहा. (तीन बाजू, तीन कोन)

(3) ΔPQRमध्ये बिंदू Q समोरील बाजू कोणती ?.

(4) Δ LMN मध्ये बाजू $\overline{LM}$ समोरील कोन कोणता ?.

(5) ΔRST मध्ये बाजू $\overline{RT}$ समोरील बिंदू कोणता ?.

जर आपण त्रिकोणाच्या बाजू व कोणाचा विचार केला तर आपणास खालील प्रकारचे त्रिकोण मिळू शकतात

त्रिकोणाचे प्रकार	समभूज त्रिकोण	समदविभूज त्रिकोण	विषमभूज त्रिकोण
लघुकोन त्रिकोण			
काटकोन त्रिकोण			
विशालकोन त्रिकोण			

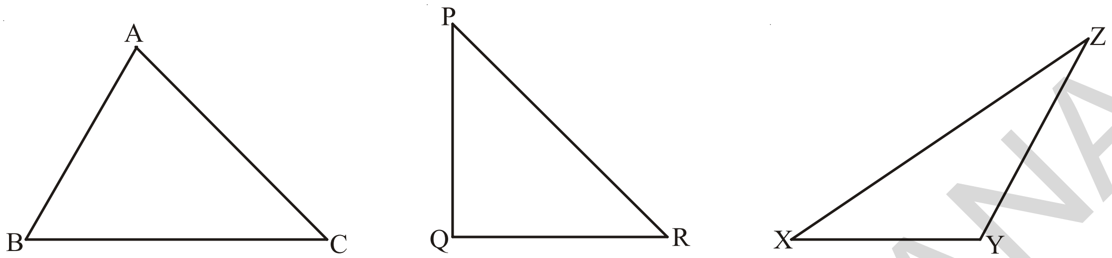
सरावासाठी

1. विविध प्रकाराचे त्रिकोणाचे कात्रण घेवून आपल्या मित्रासोबत चर्चा करा.
2. रश्मीचा दावा आहे की, त्रिकोणात काटकोन हे एकापेक्षा जास्त राहू शकत नाही.
   या विधानाशी आपण सहमत आहात काय ? का ?
3. लघुकोन त्रिकोणात दोनच लघूकोन असू शकतात या विधानाशी आपण सहमत आहात काय? का ?

5.2 त्रिकोणाच्या बाजूतील सहसंबंध

5.2.1 त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची बेरीज

खालील प्रमाणे ΔABC, ΔPQR आणि ΔXYZ काढा



मोजपट्टीच्या साह्याने अनुमान काढा

Δचे नाव	Δ च्या बाजू	दोन बाजूंची बेरीज	हे सत्य आहे?	हो/नाही
ΔABC	AB =	$\overline{AB}+\overline{BC}$ =	$\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{CA}$	
	BC =	$\overline{BC}+\overline{CA}$ =	$\overline{BC}+\overline{CA}>\overline{AB}$	
	CA =	$\overline{CA}+\overline{AB}$ =	$\overline{CA}+\overline{AB}>\overline{BC}$	
ΔPQR	PQ =	$\overline{PQ}+\overline{QR}$ =	$\overline{PQ}+\overline{QR}>\overline{RP}$	
	QR =	$\overline{QR}+\overline{RP}$ =	$\overline{QR}+\overline{RP}>\overline{PQ}$	
	RP =	$\overline{RP}+\overline{PQ}$ =	$\overline{RP}+\overline{PQ}>\overline{QR}$	
ΔXYZ	XY =	$\overline{XY}+\overline{YZ}$ =	$\overline{XY}+\overline{YZ}>\overline{ZX}$	
	YZ =	$\overline{YZ}+\overline{ZX}$ =	$\overline{YZ}+\overline{ZX}>\overline{XY}$	
	ZX	$\overline{ZX}+\overline{XY}$ =	$\overline{ZX}+\overline{XY}>\overline{YZ}$	

यावरून असे लक्षात येते की, त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजुंची बेरीज तिसऱ्या बाजू पेक्षा जास्त असते.

उदाहरणार्थ. ΔABC मध्ये, AB + BC > CA

BC + CA > AB

CA + AB > BC

5.2.2 त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या लांबीतील फरक

वरील प्रमाणे त्रिकोण घेऊन आपले अनुमान नोंदवा

Δ चे नाव	बाजूंची लांबी	दोन बाजूंतील फरक	हे सत्य आहे?	हो/नाही
ΔABC	$AB =$	$BC - CA =$	$BC - AB < AC$	
	$BC =$	$CA - AB =$	$CA - AB < BC$	
	$CA =$	$AB - BC =$	$AB - BC < CA$	
ΔPQR	$PQ =$	$QR - RP =$	$QR - RP < PQ$	
	$QR =$	$RP - PQ =$	$RP - PQ < QR$	
	$RP =$	$PQ - QR =$	$PQ - QR < RP$	
ΔXYZ	$XY =$	$YZ - ZX =$	$YZ - ZX < XY$	
	$YZ =$	$ZX - XY =$	$ZX - XY < YZ$	
	$ZX =$	$XY - YZ =$	$XY - YZ < ZX$	

यावरून असे लक्षात येते की, त्रिकोणाच्या कोणत्याही दोन बाजुंच्या लांबीतील फरक तिसऱ्या बाजू पेक्षा कमी असते.

उदाहरणार्थ ΔABC मध्ये, $AB - BC < CA$; $BC - AB < CA$

$BC - CA < AB$; $CA - BC < AB$

$CA - AB < BC$; $AB - CA < BC$

सरावासाठी

एका त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची लांबी 6 सेमी, 9 सेमी घेऊन तिसरी बाजू काढण्याचा प्रयत्न करा.

उदा.1 : त्रिकोणाच्या तिनही बाजू अनुक्रमे 6 सेमी,5 सेमी, 8 सेमी असतील का ?

उत्तर : समजा बाजू $AB = 6$ cm

$BC = 5$ cm

$CA = 8$ cm

दोन बाजूंची बेरीज $AB + BC = 6 + 5 = 11 > 8$

$BC + CA = 5 + 8 = 13 > 6$

$CA + AB = 8 + 6 = 14 > 5$

म्हणून त्रिकोण काढणे शक्य आहे कारण कोणत्या दोन बाजुची बेरिज ही तिसऱ्या बाजूपेक्षा जास्त आहे.

स्वाध्याय - 1

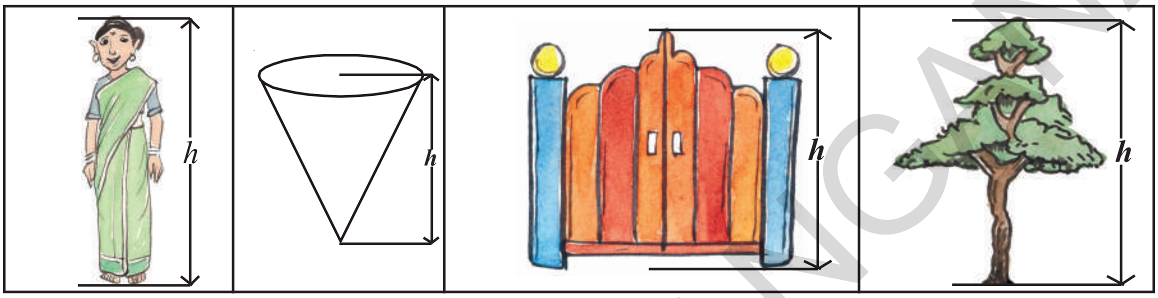
1. खालील मापावरून त्रिकोण काढणे शक्य आहे काय ?

(i) 3 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी (ii) 6 सेमी, 6 सेमी, 6 सेमी

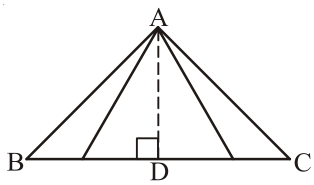
(iii) 4 सेमी, 4 सेमी, 8 सेमी. (iv) 3 सेमी, 5 सेमी, 7 सेमी

5.3 त्रिकोणाचा शिरोलंब

आपण आपल्या दैंनदिन जिवना मध्ये 'उंची' या शब्दाचा वापर विविध ठिकाणी करतो. खालील दिलेल्या आकृत्याची उंची तूम्ही मोजू शकता काय ?



तुम्ही टोकापासून तर बुडापर्यंत चा भाग उंची म्हणून मोजू शकता. याच अनूमाना नुसार त्रिकोणाची उंची सुध्दा मोजता येते.



बाजूच्या त्रिकोणामध्ये.बिंदु A पासून तर पाया $\overline{BC}$ पर्यंत.

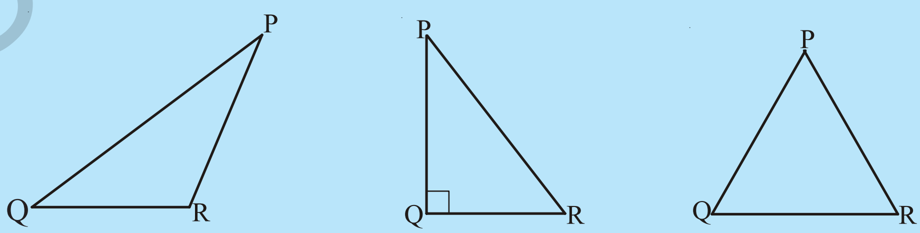
तूम्ही विचार करा विविध रेषा हया पैकी उंची दाखविणारी रेषा कोणती ?.

Δ ABC उंची हि बिंदु A पासून $\overline{BC}$ वर टाकलेला लंब होय.

तोच $\overline{AD}$ आहे. अश्याच प्रकारे सर्व शिरोलंब काढता येतात.

सरावासाठी

(i) P पासून $\overline{QR}$ वर शिरोलंब काढा त्याच प्राणे दिलेल्या आकृत्यासाठी दोन दोन शिरोलंब काढा

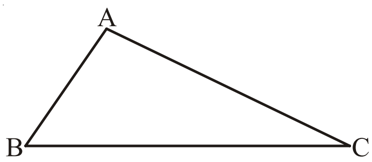


विशालकोन त्रिकोण काटकोन त्रिकोण लघुकोन त्रिकोण

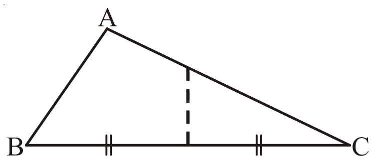
(ii) शिरोलंब हा त्रिकोणाच्या आत असेल का ?

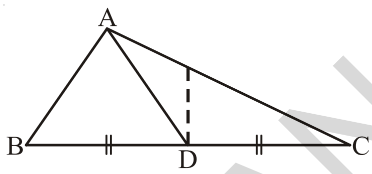
(iii) त्रिकोणाच्या दोन शिरोलंबासदोन बाजू असतात.

5.4 त्रिकोणाची मध्यगा



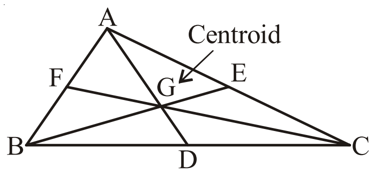
ΔABC चे कात्रण तयार करा. त्यास अशी घडी घाला की, बिंदू B व बिंदू C एकाच रेषेत असावेत. आकृतीत 1 मध्ये दाखविल्या प्रमाणे. $\overline{BC}$ ला छेदणारा बिंदू D हाच त्याची मध्यगा आहे. BC रेषा वर मध्यभागी बिंदू असा काढा की त्याचे एक टोक रेषा AC वर असेल. (आकृती 2 पाहा.)





याचप्रकारे A व C बिंदूना घडी घालाम ते $\overline{AC}$ छेदतील तो छेदन बिंदू त्याची मध्यगा D असेल. आता रेषा $\overline{AC}$ काढा ब त्यांचा मध्यगा त्याला $\overline{AC}$ नाव द्या. ज्या ठिकाणी हे बिंदू छेदतात त्यांना केंद्रक असे म्हणतात. रेषा $\overline{AC}$ वर बिंदू E हा रेषा $\overline{AC}$ चा मध्यगा आहे.

रेषा AB वर C बिंदूमधून एक रेषा बिंदू G मधून बिंदू F असा काढा की जो रेषा AB ची मध्यगा असेल. अशा प्रकारे रेषा AD, रेषा BE आणि रेषा CF ह्या तीनही रेषा बिंदू G मध्ये परस्परास छेदतात.



यातून G हा मध्यबिंदू तयार होतो या मध्यबिंदूच्या विरूद्ध बाजूस अनेक कोन तयार होतात त्यांना परस्परांचे विरूद्ध कोन म्हणतात.

तुम्हाला असे दिसेल की, तीन रेषा जेव्हा एकाच बिंदूत एकमेकींना छेदतात तेव्हा तयार होणाऱ्या मध्यबिंदूस केंद्रक म्हणतात.

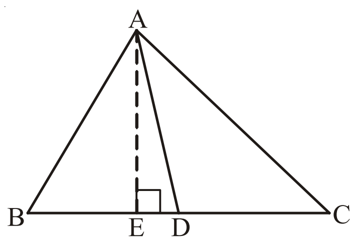
अशाप्रकारे मध्यबिंदू छेदिकेने निर्माण झालेल्या परस्परविरूद्ध कोनांना त्रिकोणाचा मध्य असे म्हणतात. आणि या कोनांच्या मध्यबिंदूला केंद्रक असे म्हणतात.

बाजूची आकृती पाहा.

सरावासाठी

काटकोन त्रिकोण व विशालकोन त्रिकोणाचे कागदाचे कात्रण घेऊन त्यांचा केंद्रक शोधा.

स्वाध्याय - 2



1. ΔABC, D हा $\overline{BC}$. चा मध्यगा आहे.

   (i) $\overline{AD}$ हा ________________________ आहे

   (ii) $\overline{AE}$ हा ________________________ आहे

2. त्रिकोणाच्या दोन बाजूवर असणाऱ्या दोन शिरोलंब कोणते.?

3. मध्यगा त्रिकोणाच्या अंर्तभागात असेल का ?

4. शिरोलंब त्रिकोणाच्या अंर्तभागात असेल का ?

5. (i) ΔXYZ मध्ये बिंदू Y समोरील बाजू लिहा.

(ii) ΔPQR मध्ये बाजू $\overline{PQ}$ समोरील कोन लिहा.

(iii) ΔABC मध्ये बाजू $\overline{AC}$ समोरील कोन लिहा.

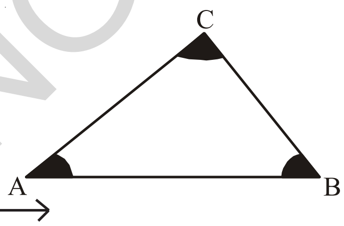
5.5 त्रिकोणाचे गुणधर्म

5.5.1 त्रिकोणाच्या बेरजेचे गुणधर्म

खालील चार कृतीतून या गुणधर्माविषयी आधिक जाणून घेऊ या.

कृती 1

1. आरेखन कागदावर त्रिकोण ABC काढा.
2. रंगित पेन्सील च्या साहयाने त्यांचे कोन दाखवा
   कात्रीच्या साहयाने त्रिकोणी क्षेत्र कापा
3. रेषा XY काढून त्यावर 'O' स्थापा



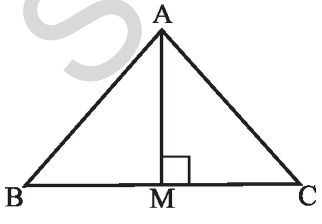
4. लगतच्या बाजूंचे कात्रण आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे 'O' या बिंदूवर जोडा

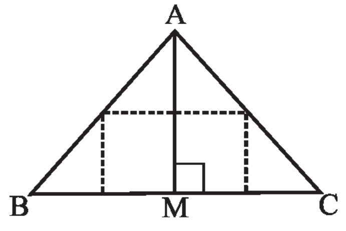
5. या वरून असे लक्षात येते की, त्रिकोणाच्या तिनही कोणाच्या मापाची बेरिज 180^0 असते

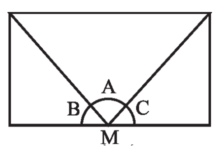
कृती 2

कागदाचे कात्रण कापून ABC नाव द्या. त्यास घडी घालून त्यावर $\overline{AM}$ शिरोलंब काढा.

आता तीनही A, B, C बिदूंची असी घडी घाला की, आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे M ला स्पर्श करायला पाहीजे.



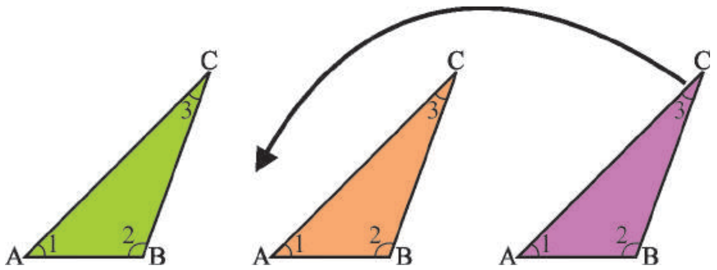




तुम्ही पाहाल तीनही A, B व C त्रिकोणात पासून सरळ रेषा आणि त्यांची बेरिज
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$.

कृती 3

कोणत्याही तीन प्रति ABC त्रिकोणाच्या घ्या. त्यावर 1,2,3 कोण बनवा.



तीनही त्रिकोणाला व्यवस्थित जोडा

वरील 'O' बिंदूविषयी $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ काय निष्कर्ष काढू शकाल ?

एकाच प्रतलातील तिन कोनाच्या मापाची बेरिज 180^0 असते.

कृती 4

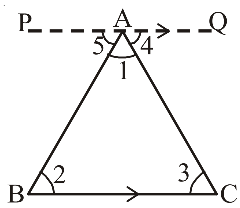
कोनमापकाच्या साहयाने ΔABC, ΔPQR व ΔXYZ काढा

त्रिकोणाचे नाव	कोना ची मापे (नैसर्गिक संख्यामध्ये)	तीनही कोणाची बेरिज
ΔABC	$\angle A$ =....., $\angle B$ =....., $\angle C$ =.....,	$\angle A + \angle B + \angle C =$
ΔPQR	$\angle P$ =....., $\angle Q$ =....., $\angle R$ =.....,	$\angle P + \angle Q + \angle R =$
ΔXYZ	$\angle X$ =....., $\angle Y$ =....., $\angle Z$ =.....,	$\angle X + \angle Y + \angle Z =$

कोणत्याही मापाच्या त्रिकोणाच्या तिन कोनाची बेरिज 180^0 असते

आता तुम्हाला समजेलच असेल की, त्रिकोणातील तीनही कोनांची बेरीज ही 180^0 असते.

त्रिकोणाच्या बेरजेच्या गुणधर्मांची सिध्दता



प्रमेय : त्रिकोणाच्या तीनही कोणाच्या मापाची बेरिज 180^0 असते.

पक्ष : त्रिकोण ABC

सिध्दता : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$

रचना : रेख $\overleftrightarrow{PQ}$ लंब BC काढा

सिद्धता : आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे

$\angle 2 = \angle 5$ (समोरासमोरील कोन)

$\angle 3 = \angle 4$ (समोरासमोरील कोन)

$\angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4$ (1 व 2 ची बेरीज करून)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 4$ (दोन्ही बाजूंमध्ये $\angle 1$ मिळवून)

$\angle 1 + \angle 5 + \angle 4 = 180^\circ$ (रेषीयजोडीतील कोन)

म्हणून, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

त्रिकोणाच्या तीनही कोनांच्या मापाची बेरीज 180^0 असते.

उदाहरण 1: ΔABC मध्ये, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, शोधा $\angle C$.

उकल : ΔABC मध्ये, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (त्रिकोणाच्या बेरजेचा गुणधर्म)

$30^\circ + 45^\circ + \angle C = 180^\circ$ (दिलेल्या किंमती ठेवून)

$75^\circ + \angle C = 180^\circ$

$\angle C = 180^\circ - 75^\circ$

म्हणून, $\angle C = 105^\circ$

उदाहरण 2 : ΔABC मध्ये, जर $\angle A = 3\angle B$ व $\angle C = 2\angle B$. ΔABC चे तीनही कोन शोधा.

उकल : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ [त्रिकोणाच्या बेरजेचा गुणधर्म]

$3\angle B + \angle B + 2\angle B = 180^\circ$ [$\angle A = 3\angle B$, $\angle C = 2\angle B$]

$6\angle B = 180^\circ$

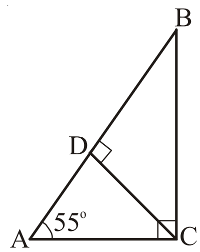
म्हणून, $\angle B = 30^\circ$

अशाप्रकारे, $\angle A = 3\angle B = 3 \times 30^\circ = 90^\circ$

$\angle C = 2\angle B = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$

उदाहरण 3 : ΔABC मध्ये C काटकोन आहे. आणि $CD \perp AB$, $\angle A = 55^\circ$

शोधा (i) $\angle ACD$ (ii) $\angle BCD$ (iii) $\angle ABC$



उकल : ΔACD मध्ये,

$\angle CAD + \angle ADC + \angle ACD = 180^\circ$ (त्रिकोणाच्या बेरजेचा गुणधर्म)

$55^\circ + 90^\circ + \angle ACD = 180^\circ$ (दिलेल्या किंमती ठेवून)

$145^\circ + \angle DCA = 180^\circ$

$\angle DCA = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$

म्हणून, $\angle DCA = 35^\circ$

(ii) ΔABC मध्ये,

$\angle BCA = 90^\circ$

म्हणून, $\angle DCA + \angle BCD = 90^\circ$ (आकृतीनुसार $\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD$)

$35^\circ + \angle BCD = 90^\circ$ ((i) पासून, $\angle ACD = 35^\circ$)

$\angle BCD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

(iii) ΔABC मध्ये,

$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ$ (त्रिकोणाच्या बेरजेचा गुणधर्म)

$\angle ABC + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ$ (दिलेले)

$\angle ABC + 145^\circ = 180^\circ$

$\angle ABC = 180^\circ - 145^\circ$

म्हणून, $\angle ABC = 35^\circ$

उदाहरण 4 : त्रिकोणाचे प्रमाण 2 : 3 : 4. तर त्रिकोण शोधा.

उकल : त्रिकोणाचे दिलेले प्रमाण $= 2 : 3 : 4$

प्रमाणाची बेरीज $= 2 + 3 + 4 = 9$

त्रिकोणाच्या सर्व कोनांची बेरीज $= 180^\circ$

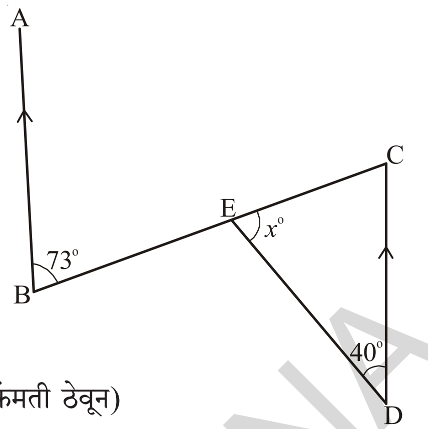
म्हणून पहिला कोन $= \frac{2}{9} \times 180^\circ = 40^\circ$

दुसरा कोन $= \frac{3}{9} \times 180^\circ = 60^\circ$

तिसरा कोन $= \frac{4}{9} \times 180^\circ = 80^\circ$

म्हणून त्रिकोणाची मापे 40°, 60° व 80° आहेत.

उदाहरण 5 : दिलेल्या आकृतीत ची किंमत शोधा



उकल : $\angle ECD = \angle CBA = 73^o$

(बाजू AB || बाजू CD हे संगतकोन आहेत)

ΔECD मध्ये,

$\angle DEC + \angle CDE + \angle ECD = 180^o$

(त्रिकोणाच्या बेरजेचे गुणधर्म)

$x^o + 40^o + 73^o = 180^o$ (दिलेल्या किंमती ठेवून)

$x^o + 113^o = 180^o$

$x^o = 180^o - 113^o$

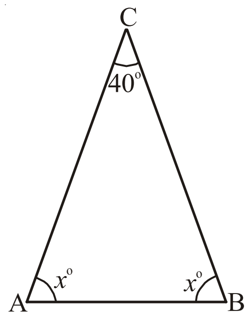
$x^o = 67^o$

उदाहरण **6 :** ΔABC च्या एका कोनाचे माप 40^o आहे आणि इतर दोन कोन एकरूप आहेत. तर त्यांची मापे काढा.

उकल : समजा $\angle C = 40^o$ आणि $\angle A = \angle B = x^o$

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (त्रिकोणाच्या बेरजेचे गुणधर्म)

$x^o + x^o + 40^o = 180^o$ (दिलेल्या किंमती ठेवून)



$2x^o + 40^o = 180^o$

$2x = 180^o - 40^o$

$2x = 140^o$

$x^o = 70^o$

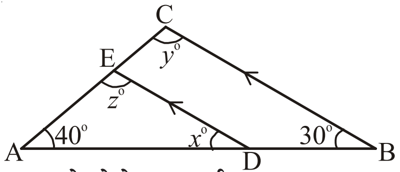
अशाप्रकारे प्रत्येक 70^o चा आहे.

उदहारण **7 :** आकृतीत ΔABC च्या बाजू AB व AC वर D व E हे बिंदू असून बाजू DE || BC.

जर $\angle B = 30^o$ व $\angle A = 40^o$, तर (i) x (ii) y (iii) z च्या किंमती शोधा.

उकल : (i) $\angle EDA = \angle CBA$ (रेषीयजोडीतील कोन DE || BC)

म्हणून, $x^o = 30^o$



(ii) ΔABC मध्ये,

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$ (त्रिकोणाच्या बेरजेचे गुणधर्म)

$40^o + 30^o + y^o = 180^o$ (दिलेल्या किंमती ठेवून)

$70^o + y^o = 180^o$

म्हणून, $y^o = 180^o - 70^o = 110^o$

(iii) Δ ADE मध्ये,

$$\angle D + \angle A + \angle E = 180^\circ \quad \text{(त्रिकोणाच्या बेरजेचे गुणधर्म)}$$

$$30^\circ + 40^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

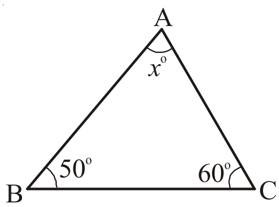
$$70^\circ + z^\circ = 180^\circ$$

$$z^\circ = 180^\circ - 70^\circ$$

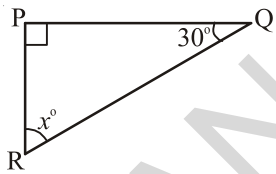
$$z^\circ = 110^\circ$$

स्वाध्याय - 3

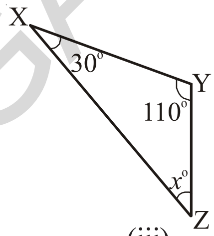
1. खालील त्रिकोणातील 'x' च्या किमती शोधा.



(i)

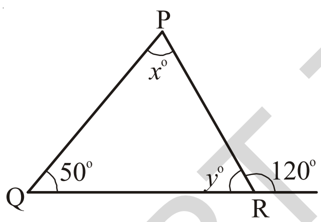


(ii)

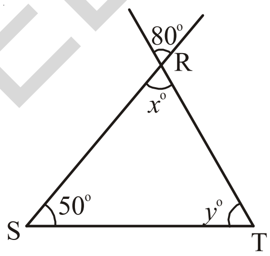


(iii)

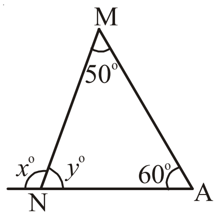
2. खालील त्रिकोणातील 'x' व 'y' च्या किमती शोधा.



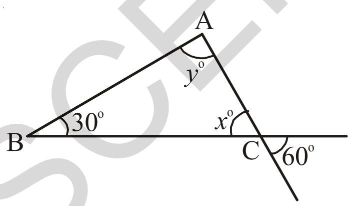
(i)



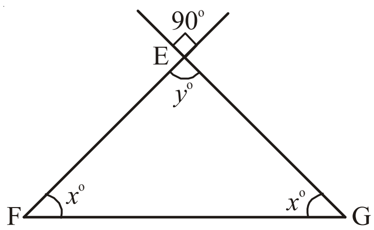
(ii)



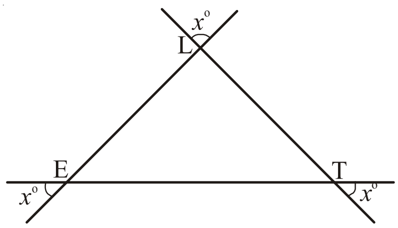
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

3. दोन कोनाच्या किमती दिल्या आहेत तिसऱ्या कोनाच्या किमती काढा.

(i) $38^\circ, 102^\circ$ (ii) $116^\circ, 30^\circ$ (iii) $40^\circ, 80^\circ$

4. काटकोन त्रिकोनात एका लघुकोनाची किंमत 30^0 आहेत. दुसऱ्या लघुकोनाची किमती काढा.

5. खालील विधान सत्य आहे किंवा असत्य ते ओळखा.

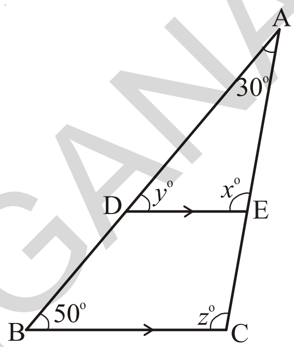
1) एका त्रिकोणात दोन काटकोन असतात.

2) एका त्रिकोणात दोन लघुकोन असतात.

3) एका त्रिकोणाला दोन विशाल कोन असतात.

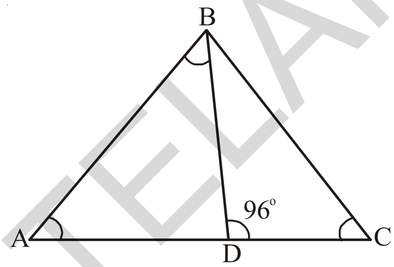
4) त्रिकोणातील प्रत्येक कोन 60^0 पेक्षा कमी असतो.

6. एका त्रिकोणातील कोनाचे प्रमाण 1:2:3. आहेत तर त्यांच्या किंमती शोधा ?



7. आकृतीत, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $\angle A = 30^o$ व $\angle B = 50^o$. x, y व z. च्या किंमती शोधा

8. आकृतीत, $\angle ABD = 3\ \angle DAB$ व $\angle BDC = 96^o$. शोधा $\angle ABD$.

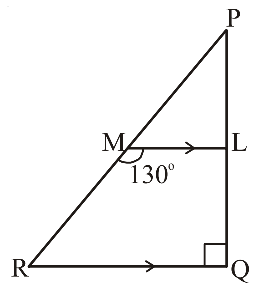


9. ΔPQR मध्ये $\angle P = 2\ \angle Q$ व $2\ \angle R = 3\ \angle Q$, ΔPQR.कोनांची बेरीज करा.

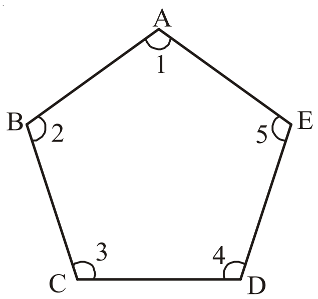
10. जर एका त्रिकोणातील कोनाचे प्रमाण 1:4:5. आहेत तर त्यांच्या किंमती शोधा ?

11. एका त्रिकोणातील लघुकोनाचे प्रमाण 2:3. आहेत तर त्यांच्या किंमती शोधा ?

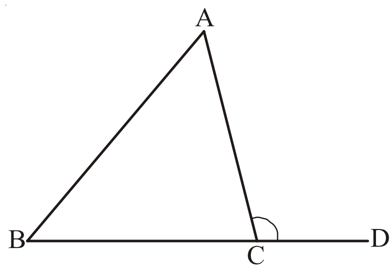
12. आकृतीत, ΔPQR, Q हा काटकोन असून $\overline{ML} \parallel \overline{RQ}$ आणि $\angle LMR = 130^o$. शोधा $\angle MPL$, $\angle LMP$ आणि $\angle QRP$.



13. आकृतीत ABCDE, शोधा $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$.



5.5.2 त्रिकोणाचे बाह्यकोन

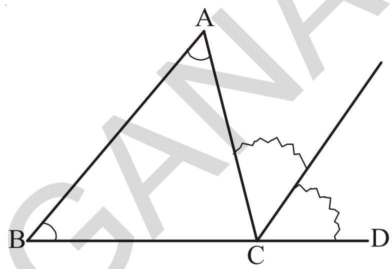


आकृती 1

आकृती 1 मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे बाजू $\overline{BC}$ असलेला ΔABC काढा. C या बिंदूवर $\angle ACD$ निर्माण झाला आहे, निरीक्षण करा. ΔABC चा $\angle ACD$ हा बाह्यकोन आहे.

येथे ΔBCA व $\angle ACD$ हे लगतचे कोन आहेत. $\angle BAC$ किंवा $\angle A$

$\angle CBA$ किंवा $\angle B$ यांना अंतत कोन म्हणतात. वरील आकृतीतील विरूद्ध कोन $\angle ACD$ कापा व कोन $\angle A$ व $\angle B$ समोरासमोर जोडा. आकृती क्र. 2 पाहा. कापलेले दोन्ही कोन ACD ला पुरेसे आहेत का? हे तपासा.



आकृती 2

कापलेल्या दोन कोनांची मापे ही $\angle ACD$ बरोबर आहेत का? हे तपासा यावरून तुम्ही असे म्हणू शकाल का की? $\angle ACD = \angle A + \angle B$?

वरील कृतीवरून आपण हे म्हणून शकतो की, बाह्यकोन आणि आंतरकोन या दोघांची बेरीज ही समान असते.

सरावासाठी

त्रिकोण ABC चा बाहयकोन $\angle ACD$ काढा. आणि $\angle ACD$, $\angle ACE$, $\angle B$ मोजा.

$\angle A + \angle B$ यांची बेरीज करून $\angle ACD$ शी तुलना करा.

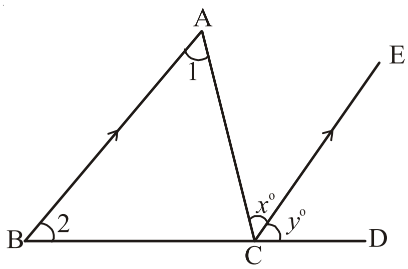
आपण निरक्षण करू की, $\angle ACD = \angle A + \angle B$ एवढा असतो.

बाह्यकोन हा अंतर्गत असलेल्या दोन कोना बरोबर असतो.

विधान : बाह्यकोनाचे माप त्याच्या अंतर्गत असलेल्या दोन विरुद्ध कोनाएवढे असते.

पक्ष : ΔABC चा $\angle ACD$ हा बाह्यकोन आहे.

रचना : बिंदू C मधून $\overline{CE} \parallel \overline{BA}$ काढा.



सिद्धता : $\angle 1 = \angle x$ ($\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ व $\overline{AC}$ समांतर आहे.)

$\angle 2 = \angle y$ ($\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ and $\overline{BD}$ रेषिय जोडीतील समांतर आहे.)

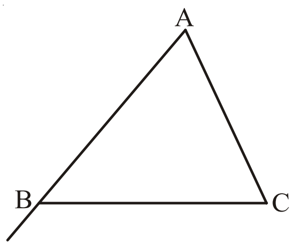
$\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$

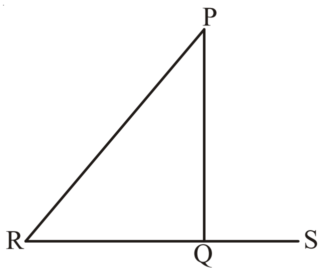
म्हणून , $\angle ACD = \angle 1 + \angle 2$ (आकृतीवरून $\angle x + \angle y = \angle ACD$)

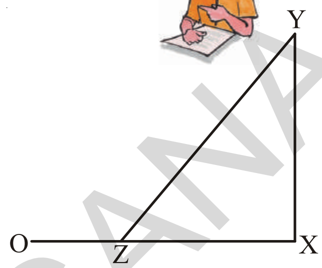
म्हणून, बाह्यकोनाचे माप त्याच्या अंतर्गत असलेल्या दोन विरुद्ध कोनाच्या मापाएवढे असते यालाच बाह्य कोनाचे गुणधर्म म्हणतात.

सरावासाठी

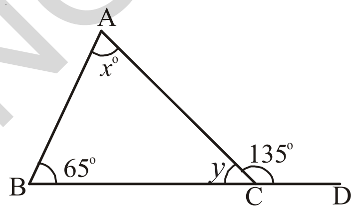
बाह्यकोन असलेले हे त्रिकोण काढा व मोजा.







उदा 8 : आकृतीत x आणि y च्या किंमती शोधा.



उत्तर : $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$

(बाह्यकोनाचे गुणधर्म)

$135^\circ = 65^\circ + x^\circ$

$135^\circ - 65^\circ = x^\circ$

म्हणून, $x^\circ = 70^\circ$

$\angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ (त्रिकोणाच्या बेरजेचे गुणधर्म)

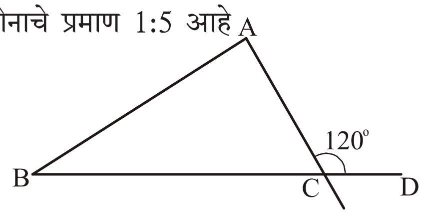
$65^\circ + 70^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$135^\circ + y^\circ = 180^\circ$

$y^\circ = 180^\circ - 135^\circ$

म्हणून, $y^\circ = 45^\circ$

उदा 9 : त्रिकोणाचा एक बाह्य कोन 120° चा असून अंतर्गत विरुद्ध कोनाचे प्रमाण 1:5 आहे तर त्यांची मापे काढा?



उत्तर : $\angle ACD = 120^\circ$ (पक्ष)

$\angle ACD = \angle A + \angle B$ (त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे गुणधर्म)

$\angle A + \angle B = 120^\circ$

$$\angle B : \angle A = 1 : 5$$

$$\angle B = \frac{1}{6} \times 120^\circ = 20^\circ$$

$$\angle A = \frac{5}{6} \times 120^\circ = 100^\circ$$

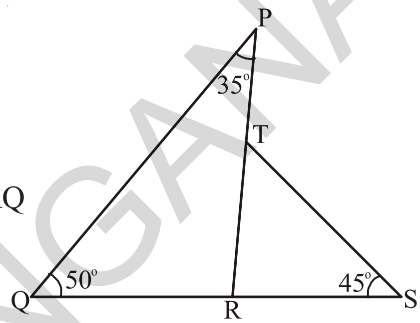
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (त्रिकोणाच्या बेरजेचे गुणधर्म)

$100^\circ + 20^\circ + \angle C = 180^\circ$

म्हणून, $\angle C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

उदाहरण 10 : बाजूच्या आकृतीत शोधा

(i) $\angle SRP$ (ii) $\angle STP$ (iii) $\angle RTS$ (iv) $\angle PRQ$



उत्तर : (i) ΔPQR, $\angle PRS$ बाह्यकोन आहे आणि

$\angle RQP$ व $\angle QPR$ अंतर्गत विरुद्ध कोन आहे.

$\therefore \angle PRS = \angle RQP + \angle QPR$ (बाह्यकोनाचे गुणधर्म)

$\angle PRS = 50^\circ + 35^\circ = 85^\circ$

(ii) ΔRST, $\angle PTS$ बाह्यकोन आहे आणि $\angle SRT$ व $\angle RST$ अंतर्गत विरुद्ध कोन आहे.

म्हणून, $\angle PTS = \angle SRT + \angle TSR$

$\angle PTS = 85^\circ + 45^\circ$ $(\angle SRT = \angle PRS = 85^\circ)$

$\angle PTS = 130^\circ$

(iii) आकृती Δ RST मध्ये,

$\angle RTS + \angle TSR + \angle SRT = 180^\circ$ (त्रिकोणाच्या बेरजेचे गुणधर्म)

$\angle RTS + 45^\circ + 85^\circ = 180^\circ$

$\angle RTS + 130^\circ = 180^\circ$

म्हणून, $\angle STR = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

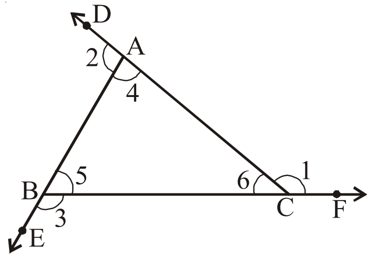
(iv) $\angle PRQ + \angle SRP = 180^\circ$ (रेषीय कोणाचे गुणधर्म)

$\angle PRQ + 85^\circ = 180^\circ$

$\angle PRQ = 180^\circ - 85^\circ$

$\angle PRQ = 95^\circ$

उदाहरण 11 : ΔABC 360^{o} असून कोनाचे बेरजेचे माप दाखवा.



उत्तर : $\angle 2 + \angle 4 = 180^{o}$ (रेषीय जोडी)

$\angle 3 + \angle 5 = 180^{o}$ (रेषीय जोडी)

$\angle 6 + \angle 1 = 180^{o}$ (रेषीय जोडी)

दोन्ही बाजू मिळवून -

$\angle 2 + \angle 4 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 1 = 180^{o} + 180^{o} + 180^{o}$

$(\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 540^{o}$

आपणास माहित आहे की $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^{o}$ (बेरजेचे गुणधर्म)

म्हणून, $180^{o} + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^{o}$

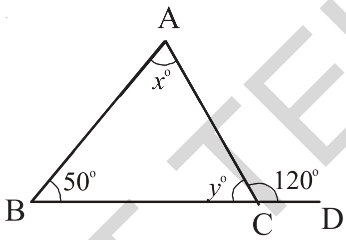
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540^{o} - 180^{o}$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^{o}$

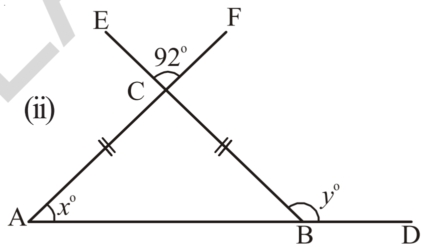
म्हणून बाह्य कोनाचे माप 360^{o}.

उदाहरण 12 : खालील आकृतीत कोन x , y शोधा.

(i)



(ii)



उकल : (i) $\angle BAC + \angle CBA = \angle ACD$ (बाह्य कोनाचे गुणधर्म)

$x^{o} + 50^{o} = 120^{o}$

$x^{o} = 120^{o} - 50^{o} = 70^{o}$

$\angle ACB + \angle ACD = 180^{o}$ (रेषीय जोडी)

$y^{o} + 120^{o} = 180^{o}$

$y^{o} = 180^{o} - 120^{o} = 60^{o}$

(ii) $\angle ACB = \angle FCE = 92^{o}$ (विरूद्ध कोन)

$\angle BAC = \angle CBA$ (विरूद्ध कोन समान असतात)

ΔABC मध्ये , $\angle BAC + \angle BAC + \angle ACB = 180^{o}$ (कोनाचे गुणधर्म)

$x^{o} + x^{o} + 92^{o} = 180^{o}$

$2x = 180^{o} - 92^{o} = 88^{o}$

म्हणून , $x^o = \frac{88}{2} = 44^o$

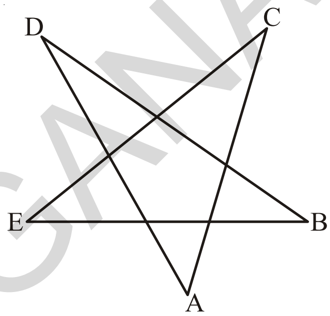
आणखी $\angle CBA + y^o = 180^o$ (रेषीय जोडी)

$y^o = 180^o - x^o$

म्हणून., $y^o = 180^o - 44^o = 136^o$

उदाहरण 13 : $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ किंमती शोधा

Solution : आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे कोनांना नावे द्या.



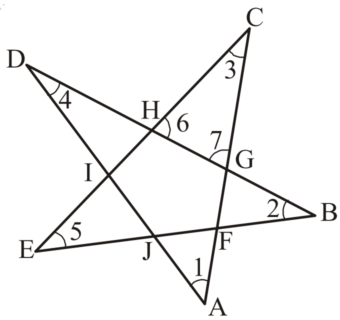
ΔGHC मध्ये $\angle 3 + \angle 6 + \angle 7 = 180^o$ ....(1)

(त्रिकोणाच्या कोनाचे गुणधर्म)

ΔEHB मध्ये, $\angle 6 = \angle 5 + \angle 2$ ....(2)

ΔAGD मध्ये, $\angle 7 = \angle 1 + \angle 4$ ....(3)

(बाह्य कोनाचे गुणधर्म)



1 मध्ये 2 आणि 3 च्या किंमती ठेवून

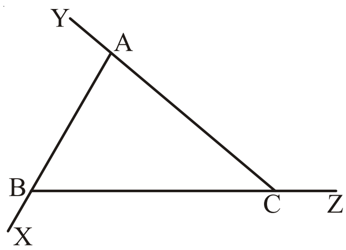
$\Rightarrow \quad \angle 3 + \angle 5 + \angle 1 + \angle 2 + \angle 4 = 180^o$

$\Rightarrow \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^o$

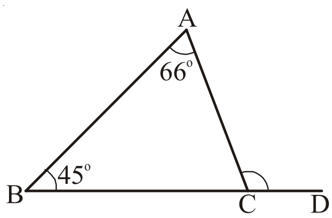
म्हणून, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^o$

स्वाध्याय- 4

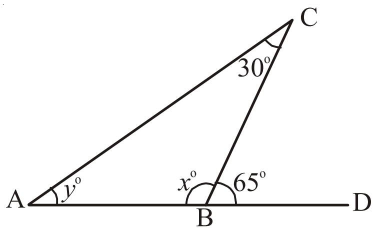
1. ΔABC मध्ये अंतर्गत व बाह्य कोनाच्या नावे द्या.



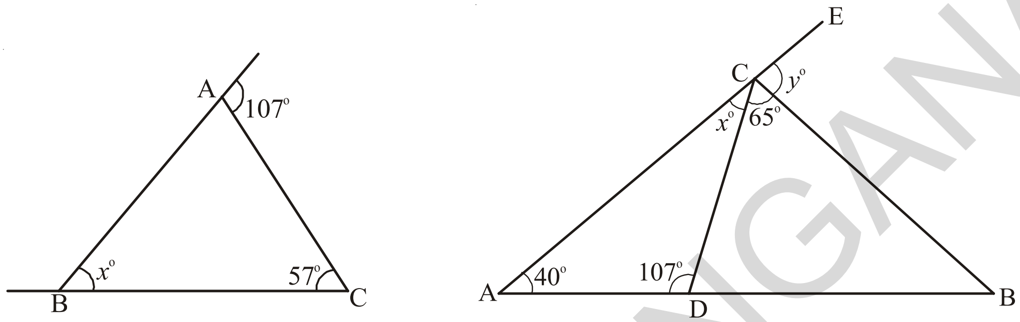
2. ΔABC च्या, $\angle ACD$ ची किंमती शोधा.



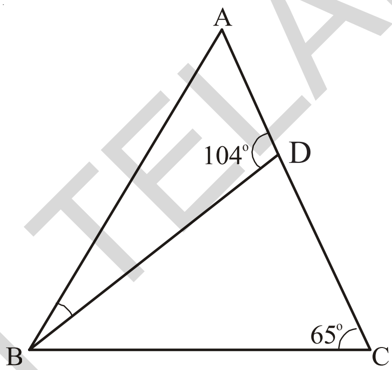
3. कोन x व कोन y. किंमती शोधा



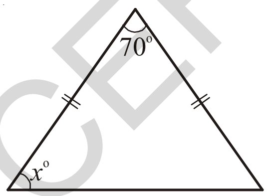
4. खालील आकृतीत x व y ची किंमती शोधा.



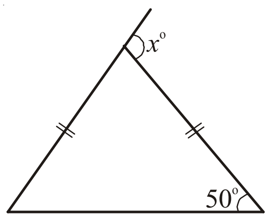
5. आकृतीत $\angle BAD = 3\ \angle DBA$, तर $\angle CDB$, $\angle DBC$ व $\angle ABC$ शोधा.



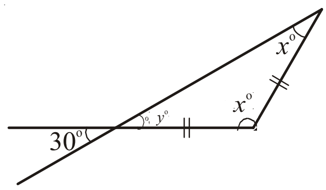
6. खालील आकृतीत x व y ची किंमती शोधा.



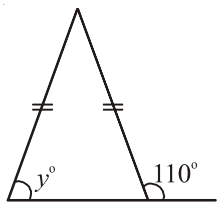
(i)



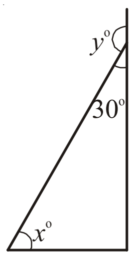
(ii)



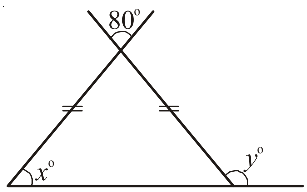
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

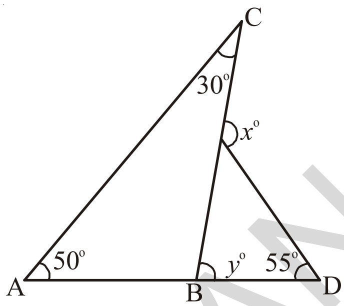
7. त्रिकोणाच्या एका बाहयकोनाचे माप 125^0 असून विरूध्द कोनाचे प्रमाण 2:3 आहे तर त्याची मापे काढा

8. बाह्य कोन PRS चे ΔPQR 105^0 आहे. जर $Q = 70^o$ तर शोधा $\angle P$ $\angle PRS > \angle P$?

9. जर त्रिकोणाचा बाह्य कोन 130^0 आणि अंतर्गत कोन 60^0 आहे तर दुसऱ्या अंतर्गत विरूद्ध कोनाचे माप शोधा.

10. एका बाह्य कोनाचे माप 105^0 व अंतर्गत विरूद्ध कोनाचे प्रमाण 2:5 तर त्रिकोणाचे माप शोधा.

11. आकृतीत x आणि y ची किंमत शोधा.



पाठ्यावलोकन

1. तीन रेषाखंड मिळून एक त्रिकोण बनतो.

2. बाजू वरून त्रिकोणाचे प्रकार पडतात.

3. तिन्ही बाजू समान असलेल्या त्रिकोणाला समभूज त्रिकोण म्हणतात.

4. दोन बाजू समान असलेल्या त्रिकोणास समद्विभूज त्रिकोण म्हणतात.

5. तिन्ही बाजू असमान असलेल्या त्रिकोणास विषमभूज त्रिकोण म्हणतात.

कोनावरून त्रिकोणाचे तीन प्रकार पडतात.

1. ज्याचे तिन्ही कोना 90^0 पेक्षा लहान असतात त्यास लघूकोन त्रिकोण म्हणतात.

2. ज्याचे एक कोन 90^0 पेक्षा जास्त असतो. त्यास विशालकोन त्रिकोण म्हणतात.

3. ज्याचा एक कोन 90^0 चा असतो त्यास काटकोन त्रिकोण म्हणतात.

सहा घटक (तीन कोन तीन बाजू) त्रिकोणास असतात.

बाजू लांबी वरून त्रिकोणाचे गुणधर्म पडतात.

i) दोन बाजूची बेरीज तिसऱ्या एका बाजू पेक्षा जास्त असतो.

ii) दोन बाजू मधील फरक तिसऱ्या बाजू पेक्षा कमी असतो.

iii) एका बाजूवर टाकलेला लंब त्याची मध्यगा असतो

iv) एका बाजूवर टाकलेला बिंदू त्याच्या लगत जोडल्यास तो त्याचा शिरोलंब म्हणतात.

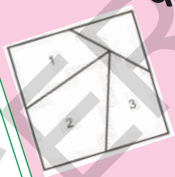
vi) त्रिकोणाच्या सर्व कोनाची बेरीज 180^0 असते.

vii) बाह्य कोनाचे माप त्याच्या विरूद्ध असलेल्या दोन अतंर्गतकोनाच्या बेरजे एवढे असते.

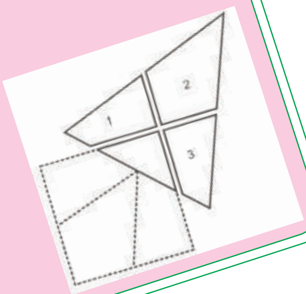
LM = LM रेषाखंडाची लांबी ; $\overline{LM}$ = LM रेषाखंडाची लांबी

$\overrightarrow{LM}$ = किरण LM ; $\overleftrightarrow{LM}$ = रेख LM

कार्ड बोर्ड आकाराची गंमत



चौरस आकाराचा कार्डबोर्ड घेऊन मध्यबिंदू टिक करा व चार विभागात कापा.



गुणोत्तर - उपयोजन 6

6.0 प्रस्तावना :

आपण पहिल्या अभ्यासक्रमात षिकलो कसे संख्याची तुलना करण्यासाठी गुणोत्तर व परिणामाचा उपयोग करता येतो. आता या वर्गात आपण पहिल्यांदा उजळणी करू आपल्याला समजलेल्या गुणोत्तराची व नंतर गुणोत्तर हा टक्केवारीत कसा मांडला जातो हे शिकणार आहोत.

6.1 गुणोत्तर :

माधुरीचे वजन 50kg आहे आणि तिच्या मुलीचे वजन 10kg आपण असे म्हणु शकतो की माधुरीचे वनज हे 5 पट आहे. तिच्या मुली पेक्षा किंवा आपण असेही म्हणु शकतो की तीच्या मुलीचे वजन $^{1}/_{5}$ आहे. तिच्या आईपेक्षा माधुरीच्या वजनाचे गुणोत्तर हे तीच्या मुलीच्या वजनाच्या 50 : 10 आहे किंवा 5 : 1 उलटरीत्या, मुलीच्या वजनाचे प्रमाण हे तीच्या आईच्या वजनाच्या 1 : 5 आहे.

एका वर्गात 60 मुल व 40 मुली आहेत मुलांची संख्या $\frac{3}{2}$ पट आहे. मुलींच्या संख्येच्या आपण असेही म्हणू शकतो मुलींची संख्या $^{2}/_{3}$ आहे मुलांच्या संख्येच्या या प्रमाणेच मुलांच्या संख्येचे गुणोत्तर हे मुलीच्या संख्येच्या 60 : 40 किंवा 3 : 2 आहे. याप्रमाणेच मुलींच्या संख्येचे हे मुलांच्या संख्येच्या 2 : 3 आहे.

आनंद जवळ 100 सें.मी. लांबीचे वायर आहे. व रश्मी जवळ 5 मी. आनंद रश्मीच्या म्हणतो माझ्या जवळील वायर हे 20 पट जास्त आहे. तुझया वायर पेक्षा तुम्हाला माहीत आहे. हे खरे नाही 5 मी हे 100 सें.मी. पेक्षा जास्त लांब आहे. रश्मीच्या वायरची लांबी ही मीटर मध्ये मांडली आहे. व आनंद च्या वायरची लांबी ही सेंटी. मीटर मध्ये. दोघांच्याही लांबी मोजण्याचे एकक हे तुलना करण्याआधी सारखे करून घेऊ .

आपल्याला माहीत आहे 1 मी = 100 सें.मी. म्हणून वायर ची लांबी रषीमीचे आहे. 5 मी = 5 मी. ह्व 100 = 500 सें.मी.

यावरून रश्मी व आनंदच्या वायरचे गुणोत्तर 500 : 100 किंवा 5 : 1 आहे. आपण असे ही म्हणू शकतो रश्मीचे वायर 5 पट लांब आहे. आनंदच्या वायर पेक्षा

वरिल सर्व उदाहरणात संख्या ची तुलना ही गुणोत्तराच्या स्वरूपात सांगितली आहे. यावरून गुणोत्तर क्रमवारीत येते. आपण गुणोत्तर दर्शविण्यासाठी ‘:’ ह्या चिन्हाच्या वापर करतो. दोन संख्यांचे गुणोत्तर **'a'** व **'b' a : b** असेही वाचतात.

सरावासाठी

तुमच्या रोजच्या जीवनातील अशा काही घटनांचा विचार करा की तूम्ही त्या संख्यांची तूलना ही गुणोत्तरात करू नका.

स्वाध्याय 1

1. 100 रू व 10 रूपये यांचे गुणोत्तर किती ? तुमचे उत्तर संक्षीप्त मांडा.

2. सुधा जवळ 5 रू आहेत राधा जवळील पैसे हे सुधा च्या पैशापेक्षा 3 पट जास्त आहेत तर राधा जवळ किती रूपये आहेत.

   (i) राधा चे पैसे व सुधा चे पैसे यांचे गुणोंत्तर काय आहे?

   (ii) सुधा चे पैसे व राधा जवळील पैसे चे गुणोत्तर किती ?

3. राजू आणि रविमध्ये 96 हे 5 : 7 या गुणोत्तरात विभागा.

4. रेषाखंड AB ची लांबी 38 सें.मी. आहे बिंदू A हा 9 : 10 हया गुणोत्तरात विभागला गेला आहे. तर रेषाखंड AX आणि XB ची लांबी शोधा.

5. रूपये 1,60,000 ा रकमेच्या 3 : 5 गुणोत्तरात विभागले असता यातील सर्वात लहान भाग कोणता असेल?

6. हिरवा कलर बनविण्यासाठी पेन्टरने पिवळा व निळा कलर 3 : 2 ह्या गुणोत्तरात मिक्स केला जर त्याने 12 लिटर पिवळा कलर वापरला तर त्याने किती निळा कलर वापरला ?

7. एका आयताची लांबी 40 सेमी आहे आणि रूंदी 20 सेमी आहे तर त्याच्या लांबीचे रूंदीचे असलेले गुणोत्तर शोधा.

8. एका गार्डन स्नेल ची गती ही 50 मीटर प्रती घंटा आहे आणि चिता 120 कि.मी. प्रती घंटा तर त्यांच्या गतीचे गुणोत्तर शोधा

9. शोधा .

   (i) तुमच्या वर्गातील मुलींचे व मुलांचे गुणोत्तर शोधा.
   (ii) तुमच्या वर्गातील दारांचे व खिडक्यांची गुणोत्तर शोधा.
   (iii) तुमच्या पुस्तकांचे वहयांशी असलेले गुणोत्तर शोधा.

वर्गात करण्याची क्रिया :

1. तुम्ही एक मोजपटटी घेऊन तुमच्या मित्राच्या सहायाने तुमच्या वर्गाची लांबी व रूंदी मोजा आणि लांबीचे रूंदीशी असलेले गुणोत्तर शोधा.

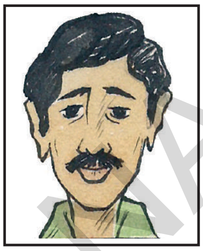
2. 10 रू. ची नोट हया त्याची लांबी व रूंदी शोधा उत्तराच्या जवळपास असणाऱ्या पुर्ण संख्यांना गोल करा, तुमच्या शिक्षकाच्या मदतीने लांबी व रूंदीचे गुणोत्तर शोधा.

याच पद्धतींची पुनरावृत्ती 20 रू व 50 रू नेट घेऊन करा आणि यांची नोंद तुमच्या वहीत करा.

6.2 परिणाम :- (प्रमाण)

श्री लेखा च्या आईने 1 कप चहा बनविण्यासाठी 2 चमचे चहा पावडर वापरले. एके दिवशी 3 पाहुणे तिच्या घरी आले. तीन कप चहा बनविण्यासाठी किती चमचे चहा पावडर ती वापरेल ? हो तुमचे बरोबर आहे. ती 6 चमचे चहा पावडर 3 कप चहा बनविण्यासाठी वापरेल या ठिकाणी हा प्रश्न सोडवतांना श्रीलेखा ची आई परिणामाचा नियम वापरते.

4 cm



6 cm

चला आजून एक उदाहरण पाहू :

रवी एक (फोटो) चित्र घेतो . त्याला ते चित्र पोटे लॅब मध्ये 4 cm × 6 cm चे मिळते.

4 cm

12 cm

त्याला चित्र अजुन मोठे पाहिजे म्हणून तो पून्हा फोटो लॅब मध्ये गेला. लॅब मॅन ने हा फोटो दिला हे पाहूण रवी म्हणाला या चित्रात काही तरी चुकीच दिसत आहे.

तुम्ही विचार करा रवी बरोबर आहे का ?

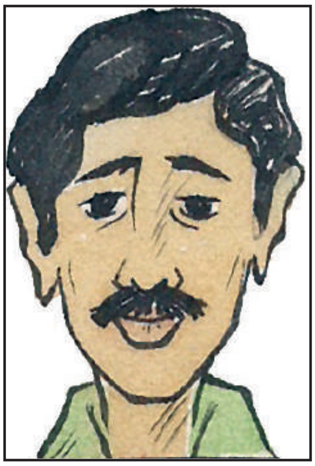
तुम्ही सांगु शकता का या चित्रात काय चुकीच आहे ?

रवीने चित्राची लांबी व रूंदी मोजण्याचे ठरविले लांबी व रूंदीचे गुणोत्तर हे मोठया केलेल्या चित्राच्या लांबी व रूंदीचे गुणोत्तर = 4 : 6 = 2 : 3

मोठया केलेल्या चित्राच्या लांबी व रूंदीचे गुणोत्तर = 4 : 12 = 1 : 3

दोन गुणोत्तर समान आहेत का ? रवि ला सुध्दा समजले की मुळ चित्राचे व मोठया केलेल्या चित्राचे गुणोत्तर हे समान नाही दुसरे चित्र हे पहिल्या चित्राच्या प्रमाणात नाही हे रविला माहित झाले. त्याने लॅब मॅन ला विचारून दुसरे चित्र मोठे करून घेतले.

8 cm



12 cm

ह्या केलेल्या चित्र चांगले होते त्याने पुन्हा लांबी व रूंदी मोजली व गुणोत्तर काढले.

लांबी व रूंदीचे गुणोत्तर = 8 : 12 = 2 : 3

आता रविला समजले की , पहिले मुळ चित्र नविन केलेले चित्र हे परिणामात (प्रमाणात) होते.

याप्रमाणेच दोन गुणोत्तर जेव्हा साराखे असतात तेव्हा ते प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.परिणामासाठी वापरणारे चिन्ह " : : " असे आहे. (च्या सारखे आहेत) जर दोन गुणोत्तर **a : b** आणि **c : d** आपण हयाला वाचु शकतो **a : b** प्रमाणात आहे **a : b : : c : d** च्या किंवा असे ही वाचू शकतो. **a : b** प्रमाणात

चार क्रमवार संख्या a, b, c, d यांना पहिले, दुसरे, तिसरे व चौथे पद असे म्हणतात. पहिले व चौथे पद यांना अंत्य पद असे म्हणतात दुसरे व तिसरे पद यानां मध्य पद किंवा मध्य असे म्हणतात.

प्रमाणात, $a : b = c : d$

म्हणजेच $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

म्हणून $ad = bc$

यावरून मध्य पदाचा गुणाकार हा अंत्य पदाच्या गुणाकारा एवढाच असतो.

म्हणजेच,

$$\underbrace{a : \overbrace{b = c} : d}_{\text{अंत्य पद}}$$

येथे 'd' हा चौथे प्रमाण आहे. आणि $d = \frac{b.c}{a}$

आपण काही उदाहरणे पाहू

उदाहरण 1 **:** शोधा $\square$ प्रमाण पूर्ण करण्यासाठी

(i) $2 : 5 = 6 : \square$

उकल : मध्य पदाचा गुणाकार हा अंत्य पदाच्या गुणाकारास समान असतो.

म्हणजेच $\underbrace{2 : \overbrace{5 = 6} : \square}$

म्हणून, $2 \times \square = 5 \times 6$

$$\square = \frac{30}{2} = 15$$

(ii) $16 : 20 = \square : 35$

मध्य पदाचा गुणाकार हा अंत्यपदाच्या गुणाकारास समान असतो.

म्हणजेच $\underbrace{16 : \overbrace{20 = \square} : 35}$

म्हणून $20 \times \square = 16 \times 35$

$$\square = \frac{560}{20} = 28$$

$\therefore$ $6 : 20 = \boxed{28} : 35$

1. खाली दिलेल्या प्रमाणातील तक्त्यात गाळलेल्या संख्या शोधा.

अ.क्र.	परिमाण	अंत्यपदाचा गुणाकार	मध्यमपदाचा गुणाकार
(i)	1 : 2 : : 4 : 8		
(ii)	5 : 6 : : 75 : 90		
(iii)	3 : 4 : : 24 : 32		
(iv)	2 : 5 : : $\boxed{}$: 15	30	
(v)	3 : 6 : : 12 : $\boxed{}$		72

2. चूक की बरोबर ते लिहा.

(i) 15 : 30 : : 30 : 40

(ii) 22 : 11 : : 12 : 6

(iii) 90 : 30 : : 36 : 12

(iv) 32 : 64 : : 6 : 12

(v) 25 : 1 : : 40 : 160

3 मधूने 5 किलो बटाटे बाजारातून विकत घेतले. जर 2 किलो बटाट्याची किंमत 36 रू. आहे तर मधूला किती रूपये द्यावे लागतील ?

4. भौतीक शास्त्र सांगते की एखाद्या वस्तुचे चंद्रावरील वजन हे जमीनीवरील वजनाच्या प्रमाणात आहे. समजा 90 कि.ग्रॉ. वजनाच्या माणसाचे चंद्रावरील वनज हे 15 किलो आहे तर 60 किलो वजनाच्या महिलेचे चंद्रावर काय वजन असेल ?

5. एक विशिष्ट डॉक्टर व इंजीनिअर चा संघ हा 2 : 5 ह्या प्रमाणात आहे.

1) जर तेथे 18 डॉक्टर आहेत तर इंजीनीअर ची संख्या कीती असेल ?

2) जर तेथे 65 इंजीनिअर असतील तर डॉक्टरांच्या संख्या शोधा.

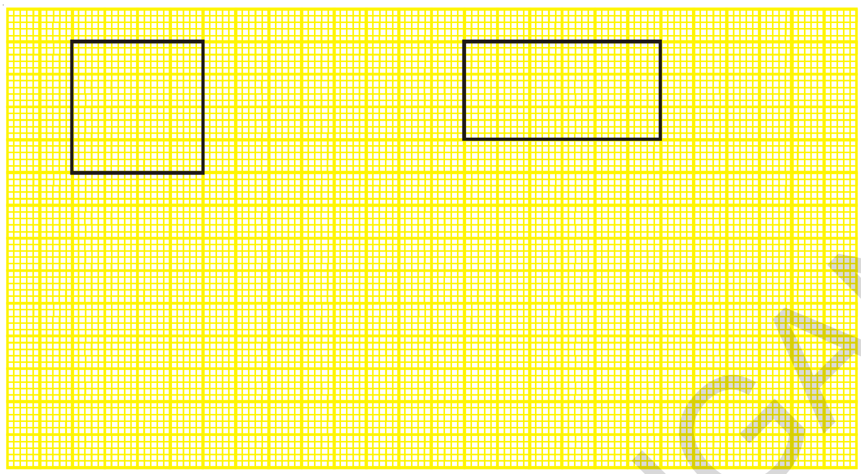
6. दोन कोणांचे गुणोत्तर हे 3 : 1 आहे तर शोधा.

(i) जर लहान कोन 180^0 असेल तर मोठा शोधा.

(ii) मोठा 63^0 असेल तर लहान कोन शोधा.

स्वाध्याय

दिलेले चौकोन व आयात मोठे करा पणा अशा प्रकारे की मोठे केलेले चौकोन व आयात हे मूळ चौकोन व आयाताच्या प्रमाणात असले पाहीजे.



6.3 प्रमाण / दर :

कधी कधी गुणोत्तर हे प्रमाण दर्शविते. काही उदाहरणे खाली दिलेले आहे.

i) माझे वडिल 60 कि.मी. ताशी या वेगाने वाहन चालवतात.

ii) मी 120 रू किलो प्रमाणे सफरचंद खरेदी केले.

iii) माझ्या ह्दयाचे ठोके एका मिनीटात 72 आहेत.

iv) अंडयांची किंमत ही 60 रू डझन आहे.

v) भारतातील जन्म दर 21 (जवळपास) आहे.
पाहा *http://www.indexmundi.com/india/*

पहिल्या उदाहरणात वाहन चालविण्याच्या अंतराचे वेळेशी तुलना केलेली आहे.

तिसऱ्या उदाहरणात ह्याच्या ठोक्याची तुलना ही दिलेल्या वेळेत केलेली आहे.

चौथ्या उदाहरणात अंड्याची किंमत अंड्याची संख्या यांची तुलना केलेली आहे.

पाचव्या उदाहरणात जन्मलेल्या तुलना ही 1000 लोकांशी केलेली आहे.

प्रति हा शब्द ‘ / ’ ह्या चिन्हाने दाखवितात.

वरिल उदाहरणे असेही लिहू शकतो 60 किमी / ताशी, 120 रू. कि.ग्रॅ., 72 ठोके / मीनिट 60 रू. / डझन आणि 21 जन्म / 1000 लोकसमूह .

6.4 एकांक पद्धती :

ज्या पद्धतीमध्ये आपण पहिल्यांदा एका एककाची किंवा गटाची किंमत शोधतो व नंतर आपल्याला पाहिजे तेवढ्या संख्याच्या एककाची किंमत शोधतो या पध्दतीलाच एकांक पध्दत असे म्हणतात.

उदाहरण 2 : एक दुकानदार 5 कप 30 रू ला विकतो तर तशा 10 कपे ची किंमत किती ?

उकल : 5 कप ची किंमत = 30 रू.

म्हणून 1 कपची किंमत = $\frac{30}{5}$ = ₹ 6

यावरून 10 कपची किंमत = $6 \times 10 =$ ₹60.

उदाहरण 3 : जर 1 डझन केळीची किंमत 20 रू. आहे तर 9 केळेची किंमत किती ?

उकल : 1 डझन = 12 एकक

12 केळीची किंमत = ₹ 20

म्हणून 1 केळीची किंमत = ₹ $\frac{20}{12}$

यावरून 9 केळीची किंमत = $\frac{20}{12} \times 9$ = ₹ 15

सरावासाठी

1) 60 विद्यार्थी बसण्यासाठी 40 बेन्चेस पाहीजेस 240 विद्यार्थी बसण्यासाठी कीती बेन्चेस लागतील ?
2) जेव्हा रॉबीन पक्षी उडतो तेव्हा एका सेंकंदात 23 वेळा त्याचे पंख फडफडतात तर 2 मीनीटात त्याचे पंख किती वेळा फडफडत असतील ?
3) मानवाच्या हृदयाच्या सरासरी ठोके 72 वेळा एका मिनीटात होतात तर 15 सेकंदात हृदयाचे ठोके किती होतील ? एका तासात किती होतील ? एका दिवसात किती होईल

6.5 सम प्रमाण / सम चलन :

रोजच्या जीवनात वेगवेगळया घटना होतात. जेव्हा एका संख्येत बदल होतो त्यावरील पुढील ही संख्येत बदल होतात.

उदाहरण :

- जर एखादी गोष्ट खरेदी करण्यात वाढ झाली तर त्याची किंमत ही वाढते. या उलट जर खरेदी कमी झाली तर त्या वस्तुची किंमत ही कमी होते.
- जर पैसे बँकेत जमा केले तर पैशासोबज व्याजही वाढते या बरोबरच जर पैसे हे कमी असले तर त्यावरील व्याज ही कमी असते.
- एका स्थीर गतीत जर प्रवासाचे अंतर वाढले तर त्याला लागणारा वेळ सुध्दा वाढतो याबरोबर जर प्रवासाचे अंतर कमी झाले तर लागणारा वेळ सुध्दा कमी होतो.

वरील उदाहरणात जेव्हा एखादी संख्या ही वाढते त्या बरोबर ची दुसरी संख्या सुध्दा वाढते व कमी झाल्यास कमी होते.

खाली दिलेल्या उदाहरणांवरून आपण हे समजून घेऊ.

एका टाकीत 300 लीटर पाणी भरण्यासाठी एका नळाला 1 तास लागतो 2 तासात कीती लीटर पाणी भरेल ?

त्या टाकीत 600 लीटर पाणी भरेल 4 तासात कीती, 8 तासात कीती ?

ही गणना तुम्ही कशी कराल ?

खाली दिलेला तक्ता पहा.

×2 ×4 ×8

टाकी भरण्यास लागणारा वेळ	1	2	4	8
भरण्याची क्षमता	300	600	1200	2400

×2 ×4 ×8

तुम्हाला वरील प्रत्येक तक्त्यात असे आढळेल की, लागणारा वेळ हा वाढला तर पाणी भरण्याची क्षमता सुध्दा वाढलेली आहे. यावरून लागणाऱ्या वेळेचे गुणोत्तर व पाणी भरण्याच्या क्षमतेचे गुणोत्तर हे सारखे आहे. याप्रमाणेच जेव्हा वेळ हा दुप्पट दिला तर पाणी भरण्याची क्षमता सुध्दा दुप्पट होईल. जेव्हा वेळा हा 4 पटीने वाढलेले असेल. आणि जेव्हा दिलेला वेळ हा 8 पट असेल तेव्हा पाणी हे 8 पटीणे जास्त असेल. लागणाऱ्या वेळेचे गुणोत्तर हे 1 : 2 आहे तर पाणी भरण्याच्या क्षमतेचे गुणोत्तर सुध्दा 1 : 2 आहे. यावरून आपण म्हणू शकतो की टाकी भरण्यास लागणारा वेळ व भरण्याची क्षमता हे सम प्रमाणात आहे.

उदाहरण 4 : एक दुकानदार 6 अंडी 30 रू ला विकतो तर 10 अंडीची किंमत किती असेल ?

उकल : समजा 10 अंडयाची किंमत x रू.

आपल्याला माहित आहे की अंडयाची संख्या वाढली तर त्याची किंमत ही वाढेल म्हणजेच अंडयाच्या संख्येचे गुणोत्तर व त्याच्या किमतीचे गुणोत्तर हे सारखे राहील. दुसऱ्या शब्दात सांगायचे तर अंडयाच्या संख्येचे गुणोत्तर व किंमतीचे गुणोत्तर हे प्रमाणात आहे.

यावरून, $6 : 10 = 30 : x$

आपण पहिल्या प्रमाणे मध्यम पदाचा गुणाकार हा अंत्यपदाच्या गुणाकाराऐवढा असतो. :

$$6 \times x = 10 \times 30$$

$$6x = 10 \times 30$$

$$x = \frac{10 \times 30}{6} = 50$$

$x =$ ₹ 50

यावरून दहा अंड्याची किंमत ₹50.

हे गणित आपण एकांक पद्धतीनेसुद्धा सोडवू शकतो. यामध्ये पहिल्यांदा एका अंड्याची किंमत शोधावी लागते. व आलेल्या किंमतीने आपल्याला जेवढ्या संख्येचे उत्तर काढायचे त्याला त्याने गुणावे लागते.

6 अंडयाची किंमत 30 रू. आहे.

म्हणून, एका अंडयाची किंमत $= \frac{30}{6} =$ ₹ 5

10 अंड्याची किंमत $= 5 \times 10 =$ ₹ 50

उदाहरण 5 : कुटुंबातील 4 व्यक्तींना 20 कीग्रॅ तांदुळ आवष्यक आहे. जर 10 व्यक्ती त्या घरात वाढले तर कीती कीलो ग्रॅ. तांदुळ त्या घरात लागेल ?

पद्धत : गिरीजा म्हणाल व्यक्तींची संख्या वाढली तर लागणाऱ्या तांदळाची संख्या वाढेलही म्हणून व्यक्तींच्या संख्येचे गुणोत्तर व लागणाऱ्या तांदळाचे गुणोत्तर हे सारखे आहे.

उकल : समजा, 10 व्यक्तींना x एवढे तांदुळ लागतील.

म्हणून $x : 20 = 10 : 4$

आपण पहीले की मध्यम पदांचा गुणाकार हा अंत्यपदाच्या गुणाकारा एवढा आहे.

$$4x = 20 \times 10$$

$$x = \frac{20 \times 10}{4} = 50$$

$x = 50$ कि.ग्रॅ.

$\therefore$ 10 व्यक्तींना 50 कि.ग्रॅ. तांदुळ लागतील.

पद्धत 2 : सरलाने हा प्रश्न सोडविण्यासाठी एकांक पद्धतीचा वापर केला.

4 व्यक्तींना लागणारा तांदुळ = 20 कि.ग्रॅ.

यावरून 1 व्यक्तीला लागणारा तांदूळ = $\frac{20}{4} = 5$ कि.ग्रॅ.

$\therefore$ 10 व्यक्तींना = $10 \times 5 = 50$ कि.ग्रॅ. तांदुळ लागतील.

उदारहरण 6 : एका स्थीर गतीत एक गाडी 90 किमी अंतर हे 3 तासात जाते. 150 किमी अंतर कापण्यास गाडीला कीती तास लागतील ?

आपल्याला माहीत आहे अंतर वाढेल तर लागणारा वेळ सुध्दा वाढतो.

म्हणून की.मी च्या संख्येचे गुणोत्तराचे प्रमाण हे लागणाऱ्या वेळेच्या गुणोत्तरा एवढेच आहे.

यावरून की.मी ची संख्या व लागणाऱ्या वेळेची संख्या ही सारखी असते.

उकल : समजा x या तासात गाडी 150 किमी अंतर जाते.

म्हणून $x : 3 = 150 : 90$

आपण पाहिले की मध्यम पदाचा गुणाकार हा अंत्य पदाच्या गुणाकारा एवढा असतो.

$90\,x = 150 \times 3$

$$x = \frac{150 \times 3}{90} = 5$$

$x = 5$

$\therefore$ 150 किमी अंतर जाण्यासाठी 5 तास लागतील.

उदाहरण 8 : नकाशात मोजपटटी ही 1 : 30000 या प्रमाणे दिलेली आहे. दोन शहरे ही नकाशावर 4 सेमी अंतरावर आहेत. त्या दोन शहरातील खरे अंतर शोधा.

उकल : समजा खरे अंतर हे x सें.मी.

$1:30000 = 4 : x$

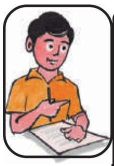
आपण पहिल्या प्रमाणे मध्यम पदाचा गुणाकार हा अंत्य पदाच्या गुणाकारा एवढा असतो.

$x = 4 \times 30,000$

$= 1,20,000$ cm

$= 1.2$ kms (1 कि.ग्रॅ. = 1,00,000 सें.मी.)

यावरून दोन शहरे जी 4 सेमी अंतरावर नकाशावर आहेत ती 1. 2 अंतरावर आहे.



सरावासाठी

1. एक लिटरची एक रिकामी बाटली थेंब थेंब गळणाऱ्या नळाखाली ठेवल्यास ती बाटली भरण्यास किती वेळ लागेल यावरून एका वर्षात किती पाणी वाया जाते. याची गणना करा.

2. एक घडयाळ घ्या व त्याचा मीनीट काटा हा 12 वर पक्का करा.
दिलेल्या प्रत्येक मधील वेळेत हा मिनीट काटा कोन बनवतो त्या बनवलेल्या कोन ची नोंद करा.

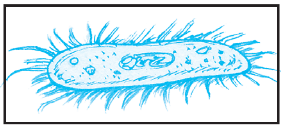
जणारा वेळ	(T_1)	(T_2)	(T_3)	(T_4)
(मिनीटात)	15	30	45	60
बदलणारे कोन	(A_1)	(A_2)	(A_3)	(A_4)
(अंशामध्ये)	90	....	....	....

यावरून तुमच्या असे लक्षात येईल की, घड्याळाच्या काट्याचा कोन आणि वेळ याचे गुणोत्तर हे एक समान असते. होय ना?

वरील तक्त्यावरून तुम्ही सुध्दा पाहू शकता की,
$T_1 : T_2 = A_1 : A_2$, कारण
$T_1 : T_2 = 15 : 30 = 1 : 2$
$A_1 : A_2 = 90 : 180 = 1 : 2$
तपसा जर $T_2 : T_3 = A_2 : A_3$ and $T_3 : T_4 = A_3 : A_4$
तुम्ही ही कृती तुमच्या निवडीचे वेळ घेवून ही पुन्हा पुन्हा करू शकता.

स्वाध्याय - 3

1. एका सूक्ष्म जंतूची लांबी 50,000 पटीने मोठी होते त्याची पूर्वीची लांबी 5 सेमी आहे. जर 20,000 पटीने लांबी वाढली तर त्याची लांबी किती असेल?



2. खालील तक्त्याचे निरीक्षण करा आणि x हे गुणोत्तराच्या समप्रमाणात आहे का? ते शोधा.

(i)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(ii)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(iii)

x	5	8	12	15	18	20	25
y	15	24	36	60	72	100	125

3. सुषमाजवळ नकाशा आहे त्यावरील मोजपट्टी ही 18 की.मी. लांबी 1 सेमी आहे तीने 72 की.मी प्रवास रोडवर केला तर तिने नकाशावरील किती अंतर कापले ?

4. एका ग्रीड पेपर वर वेगवेगळ्या आकाराचे पाच चौकोन काढा.
खालील माहिती लिहा.

	चौरस 1	चौरस 2	चौरस 3	चौरस 4	चौरस 5
बाजुची लांबी (L)					
परीघ (P)					
क्षेत्रफळ (A)					

बाजुची लांबी ही खालील 1 व 2 च्या प्रमाणात आहे की नाही शोधा.

(i) चौकोनाचा परीघ

(ii) चौकोनाचे क्षेत्रफळ

गुणोत्तर सुद्धा टक्केवारीच्या स्वरूपात दर्शनी येते. आपण टक्केवारी शिकणार आहोत. आणि त्याच बरोबर टक्केवारीचा वापर आपण आपल्या रोजच्या जीवनात विविध प्रकारे करतो ते पाहू.

6.6 टक्केवारी :

- सोमयाला गणितात 65% मार्क मिळाले आणि रणजीतला 59% मिळाले.
- एक कपडा विक्रेत्याने होलसेल मार्केट मध्ये 25% नफा मिळवीला सिल्क च्या साडीवर आणि रीटेल मार्केटमध्ये 10% नफा मिळविला.

- अनिताने एका वर्षासाठी बँकेमधून 10000 रू. कर्ज मिळविले तिला 10% व्याज हा वर्षाच्या अखेरीस द्यावा लागला.
- सणाच्या दिवसात एका टी. व्ही. विक्रेत्याने 15% सूट दिली होती.

शेकडा म्हणजे प्रत्येक शंभरवर किंवा शंभरसाठी शेकडा दर्शविण्यासाठी % हे चिन्ह वापरतात

यावरून, 1 % म्हणजे 100 पैकी 1,

27 % म्हणजे (27 शेकडा) 100 पैकी 27,

93 % (शेकडा 93) म्हणजे 100 पैकी 93.

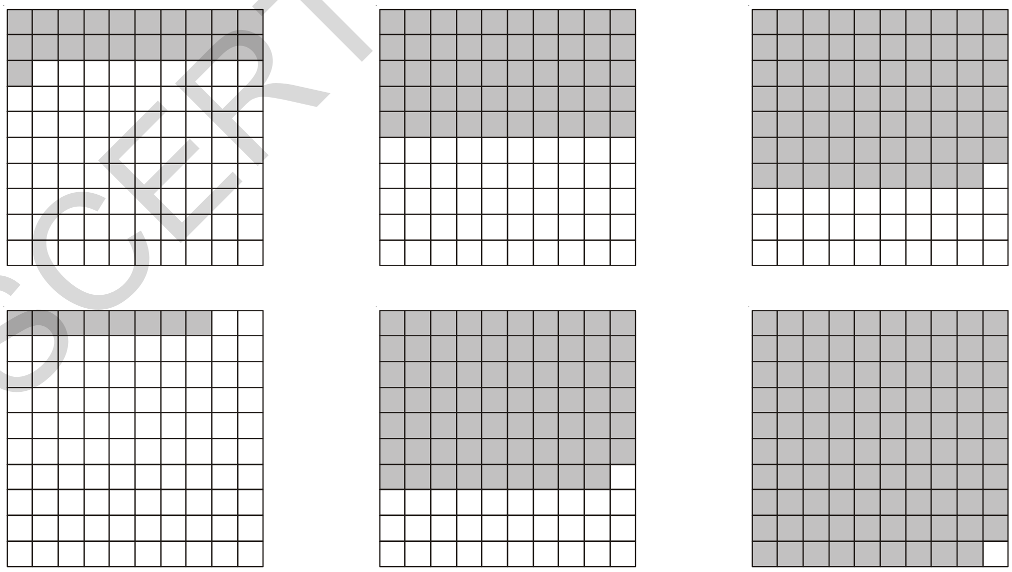
1 % याला आपण असेही लिहू शकतो. $\frac{1}{100}$ किंवा 0.01

27 % आपण असेही लिहू शकतो $\frac{27}{100}$ किंवा 0.27

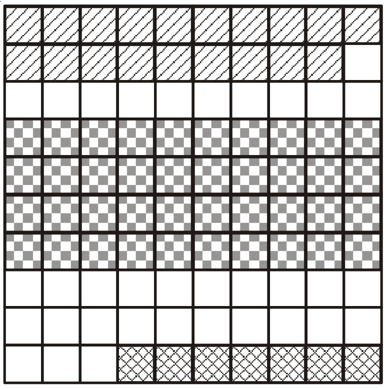
93 % आपण असेही लिहू शकतो $\frac{93}{100}$ किंवा 0.93

सरावासाठी

1. खाली दिलेल्या 100 चौरसाच्या वेगवेगळ्या जोड्या आहेत. प्रत्येक चौरसाच्या वेगवेगळ्या भागाला कलर हे वेगळ्या प्रमाणात आहेत. प्रत्येक चौरसातील रंग दिलेला भाग व पांढरा भाग हा खालील प्रमाणात लिहा. 1) टक्केवारीत, 2) अपूर्णांक, 3) दशांश अपूर्णांक



2. खाली दिलेल्या आलेख पेपरकडे पाहा तो वेगवेगळ्या चित्रांनी टिपलेला आहे.



त्यातील प्रत्येक चित्रातील टक्केवारी शोधा.

किती टक्के हे चित्र दर्शविते ?

किती टक्के हे चित्र दर्शविते ?

किती टक्के हे चित्र दर्शविते ?

किती टक्के हे चित्र दर्शविते ?

3. एका विशिष्ट शाळेची संख्या खाली दिलेली आहे.
प्रत्येक वर्गाची संख्या ही अपूर्णांक, टक्केवारीत मांडा

इयत्ता	विद्यार्थी संख्या	अपूर्णांकात	टक्केवारीत
VI	17		
VII	15		
VIII	20		
IX	30		
X	18		
एकूण	100		

वरील सर्व उदाहरणांत संख्याची बेरीज म्हणजेच एकूण / पूर्ण संख्या 100 आहेत, तर एकुण संख्या 100 नसतील तर आपण कसे शोधू.

उदाहरण 8 : एका वर्गात 35 मुली व 15 मुले आहेत मुलींची टक्केवारी किती ? व मुलांची टक्केवारी किती?

सुधीरने अशा प्रकारे सोडवणूक केली.

तक्ता - 1

उकल

विद्यार्थी	संख्या	अपूर्णांक	छेद 100 करून	टक्केवारी
मुली	35	$\frac{35}{50}$	$\frac{35}{50}\times\frac{100}{100}=\frac{70}{100}$	70%
मुले	15	$\frac{15}{50}$	$\frac{15}{50}\times\frac{100}{100}=\frac{30}{100}$	30%
एकूण	50			

तक्ता 2

अन्वर ने मुलींची व मुलांची टक्केवारी खालील प्रमाणे शोधली.

एकुण विद्यार्थी संख्या $35 + 15 = 50$

50 विद्यार्थ्यांपैकी येथे 35 मुली आहेत.

यावरून 100 विद्यार्थ्यांपैकी $\frac{35}{50} \times 100 = 70$ मुली

तक्ता 3

रिनाने ह्या प्रकारे सोडविले.

$$\frac{35}{50} \times \frac{2}{2} = \frac{70}{100} = 70\%$$

आपण टक्केवारी शोधण्यासाठी येथे तीन प्रकारच्या पध्दतीचा वापर केला आहे. जेव्हा एकुण संख्या ही 100 नव्हती पहिल्या तक्त्यात आपण अपूर्णांकाला $\frac{100}{100}$ ने गुणले हयामुळे आपल्या अपुर्णांकाची किंमत छेदस्थानी होते. रिनाने $\frac{2}{2}$ ने गुणले कारण 100 छेदस्थानी मिळविण्यासाठी.

अन्वर ने एकांक पध्दतीचा वापर केला. तुम्ही यापैकी कोणतीही पध्दत निवडू शकता किंवा तुम्ही तुमची पध्दत शोधू शकता.

अन्वर ची पध्दत ही प्रत्येक वेळी वापरता येईल ? रीना ची पध्दत ही प्रत्येकवेळी वापरता येईल ?

अन्वर म्हणाला की रिना ची पध्दत अशा वेळेस वापरू शकतो जेव्हा नैसर्गिक संख्या असेल आणि त्याचा गुणाकार केल्यास छेदस्थानी 100 मिळतील आपण पाहिले की छेद हा 50 होता त्यामुळे ती 2 ने गुणाकार करू शकली व छेद 100 मिळाला.

जर छेद हा 50 असला तर ती ही पध्दत वापरू शकली नसती तुम्ही सहमत आहात का?

उदाहरण 9 : शर्ट "A" हा $\frac{3}{5}$ कॉटन चा आहे व शर्ट "B" हा $\frac{3}{4}$ कॉटन चा आहे.

1) प्रत्येक शर्ट मध्ये किती टक्के (शेकडा) कॉटन आहे ?

2) कोणत्या शर्ट मध्ये जास्त टक्के कॉटन आहे ?

उकल : "A" शर्ट मधील कॉटनची शेकडकवारी $= \frac{3}{5} \times 100 = 60\%$

"B" शर्ट मधील कॉटनची शेकडकवारी $= \frac{3}{4} \times 100 = 75\%$

कॉटनची शेकडकवारी शर्ट "B" मध्ये जास्त प्रमाण आहे.

उदाहरण 10 : गंगा 1 मीटर कापड घेऊन टेलर कडे गेली तीने तिच्यासाठी ब्लावूज शिवण्यास सांगीतले टेलर ने ब्लाऊज तयार करण्यासाठी 0.75 मी कापड वापरले व उरलेला कपडा परत केला.

किती टक्के कापड आहे

1) ब्लाऊज तयार करण्यासाठी वापरलेला कपडा

2) गंगाला परत केलेला कपडा?

उत्तर : टेलरने 0.75 मी कापड वापरले.

वापरलेल्या कापडाची टक्केवारी $= 0.75 \times 100\%$

$$= \frac{75}{100} \times 100\,\%$$

$$= 75\%$$

टेलरने परत केलेला कपडा $1 - 0.75 = 0.25$ मी.

परत केलेल्या कापडाची टक्केवारी $= 0.25 \times 100\%$

$$= \frac{25}{100} \times 100\ \%$$

$$= 25\ \%$$

उदाहरण 11 : मागील वर्षी रंगाची किंमत ही ₹ 40 होती यावर्षी रंगाची किंमत ही वाढली व ₹ 50 झाली तर किंमती मध्ये किती टक्क्यांनी वाढ झाली ?

उत्तर : वाढलेल्या किंमतीची टक्केवारी $= \dfrac{\text{बदललेली रक्कम}}{\text{मूळ रक्कम}} \times 100\ \%$

$$= \frac{50-40}{40} \times 100\,\%$$

$$= \frac{10}{40} \times 100\% = \frac{1000}{40}\% = 25\ \%$$

उदाहरण 12 : श्यामचा मासीक पगार ₹ 10,000 तो 60% त्याच्या कौटुंबीक गोष्टीवर , 10% वैद्यकीय बाबीवर 5% देणगीवर आणी 25% बचत . प्रत्येक गोष्टीवर तो कीती रक्कम खर्च करतो शोधा ?

उत्तर : कौटूबींक गोष्टीवरील खर्च = पुर्ण रकमेच्या 60%

$= 60\%$ of ₹.10000

$= \frac{60}{100} \times 10000 =$ ₹.6000

याप्रमाणे, वैद्यकीय बाबींवर खर्च झालेली रक्कम $= \frac{10}{100} \times 10000 =$ ₹.1000

देणगीवर खर्च झालेली रक्कम $= \frac{5}{100} \times 10000 =$ ₹.500

वाचवलेली रक्कम $= \frac{25}{100} \times 10000 =$ ₹. 2500

स्वाध्याय 4

1. एका शाळेत 48 विद्यार्थी 10 विच्या परीक्षेस होते त्यापैकी 36 विद्यार्थी पास झाले दुसऱ्या शाळेत 30 विद्यार्थी होते आणि 24 पास झाले जर जिल्हा शिक्षण मंत्रांनी बक्षीस हे उत्तीर्ण झालेल्या विद्यार्थ्यांच्या टक्केवारीच्या प्रमाणावर द्यायचे ठरविले तर कोणत्या शाळेला कोणत्या शाळेला बक्षीस दिल्या जाईल ?

2. ज्योतीजवळ एका बास्केट मध्ये केळी , संत्री व आंबे होते जर 50% केळी 15% संत्री आहेत तर आंबे किती टक्के आहेत ?

3. 64% + 20% + ...?....... = 100%

4. मागील वर्षी 1000 उपकरणांनी किंमत ₹ 5000 होती यावर्षी खाली येवून ₹ 4000 झाली तर कीती टक्यांनी किंमत कमी झाली ?

5. पावसाळ्याच्या दिवसात 150 विद्यार्थ्यांपैकी 25 विद्यार्थी अनुपस्थीत होते तर कीती टक्के विद्यार्थी अनुपस्थीत होते ? उपस्थीत विद्यार्थ्यांचे टक्केवारी किती ?

6. 12000 मतदारापैकी 60% मतदारांनी मतदान केले तर किती लोकांनी मतदान केले ?

7. एक क्रिकेट चा संघ हा 20 मॅच हा एका सीझन मध्ये खेळतो जर त्यापैकी 25% मॅच ते जींकात असतील तर कीती मॅच ते ठरत असतील ?

8. प्रत्येकी एका ग्राम सोन्यात सोनार 0.25 ग्रॅम चांदी आणि 0.05 ग्रॅम तांबे मिसळते तर किती टक्के सोने, चांदी व तांबे हे एका ग्राम सोन्यात असतील ?

9. एका संख्येच्या 40% म्हणजेच 800 आहे तर ती संख्या शोधा ?

सरावासाठी

1. आपल्या देशाची लोकसंख्या 2011 च्या जणगणने नुसार 12×10^8 (120.00.00.000) एवढी आहे. जर प्रत्येक वर्षी आपल्या देशाची लोकसंख्य 2012 मधे किती लोकसंख्या असेल?

2. (i) तुम्ही 75% दोसा खावू शकता का ?

   (ii) वस्तुची किंमत 90% नी वाढू शकते का ?

   (iii) वस्तुची किंमत 100% नी वाढू शकते का ?

प्रकल्प कार्य

खालील तक्ता पूर्ण करा. तो दर्शवितो की, तुम्ही तुमचा किती वेळ दिवसातील वेगवेगळ्या कार्यावर खर्च करता आणि तुमच्या प्रत्येक कार्यावर किती खर्च करता याची गणना करा.

कृती	तासांची संख्या	दिवसाचे %
ब्रशसाठी, आंघोळीसाठी व शाळेसाठी तयार होण्यासाठी.		
शाळेत		
वाचन व गृहकार्यासाठी		
खेळण्यासाठी/ टी.व्ही पाहण्यासाठी/पालकांच्या मदतीसाठी		
झोपण्यासाठी		

6.7 काही घटना किंवा परिस्थिती की त्यामध्ये आपण टक्केवारी वापरतो.

नफा आणि तोटा, सूट आणि व्याज हे मांडण्यासाठी आपण टक्केवारीचा वापर करतो. हे सर्व टक्केवारीत मांडल्यावर तूलना करणे सोपे जाते.

6.7.1 नफा आणि तोटा

- एक कुंभार चाकावर मडकी तयार करतो. नंतर त्याला भटटीत भाजतो आणि कलटणे रंगवितो त्यावर त्याला ₹ 3 खर्च येतो. ₹ 2 भाजण्यासाठी व ₹ 1 रंगदेण्यासाठी व एक भांडी ₹ 10 प्रमाणे विकतो. तर त्याला नफा झाला की तोटा ?
- खेळणीवाला ₹ 50 ला बनवितो आणि ₹ 75 ला विकतो. तर त्याला नफा झाला की तोटा ?
- एका विक्रत्याने ₹ 540 शर्ट घेवून तो वर्षाअखेर पर्यत विकल्या गेला नाही.

तो शर्ट वर्षखेर ₹ 500 ला विकला. तर त्याला नफा झाला की तोटा तो काढा ?

- अमर नावाच्या सोनाच्या व्यापारीने मागिल वर्षी 10 ग्रॅम सोने ₹ 15000 ला विकले. आता त्याची किंमत ₹ 20000 वर गेली आहे. तर अमरला नफा होईल की तोटा तो काढा.

वरील प्रत्येक उदाहरणात नफा किंवा तोटा हा आलाच, हा दाखविण्यासाठी टक्केवारीचा वापर करतात.

उदाहरण 14 : रम्मयाने ₹200 च्या पेनी घेतल्या व ₹240 ला वीकल्या. सामयाने ₹500 ला घेतल्या व ₹575 ला विकल्या. तर कोणाला जास्त नफा झाला असावा ?

नफा शोधण्यासाठी विक्रीदर आणि खरेदी दराची तुलना करावी. नफा=विक्रीदर-खरेदीदर

उत्तर : रमयाचा नफा = ₹ 240 – ₹ 200 = ₹ 40

सोमयाचा नफा = ₹ 575 – ₹ 500 = ₹ 75

या वरून असे दिसते की, सोमयाला ₹ 75 जास्त नफा झाला. जेव्हा त्यांनी 500 रु. चे भांडवल लावेल व रमयाला ₹ 40 नफा झाला. जेव्हा त्यांनी 200 रु.चे भांडवल लावेल. हे बरोबर असेल काय?

म्हणून, आता रमयाच्या खरेदिचे गुणोतर काढुत. $= \frac{40}{200}$ आणि

आता सोमयाच्या खरेदिचे गुणोतर काढुत $= \frac{75}{500}$

नफा व तोटा याची तूलना करण्यासाठी आपण त्याला टक्केवारी म्हणूत. आणि आता बदलून पाहुया.

यावरून,

रमयाचा शेकडा नफा

$= \frac{40}{200} \times 100\%$

$= 20\ \%$

सोमयाचा शेकडा नफा

$= \frac{70}{500} \times 100\%$

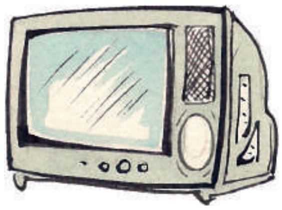
$= 15\%$

रामयाने शंभार रुपयाच्या गुंतवणुकीवर 20 टक्के नफा मिळविला.

म्हणजेच त्याने 100 रुपयांच्या गुंतवणुकीवर 20 रुपये मिळविले. तर सोमयाने शंभर रुपयाच्या गुंतवणुकीवर 15 टक्के म्हणजेच 15 रुपये नफा मिळविला.

यावरून रामयाने सोमयापेक्षा जास्त नफा मिळविला.

उदाहरण 15 : एका दुकानदाराने एक टि.व्ही. ₹ 9000 ला विकत घेतला आणि ₹ 10000 ला विकला तर त्याचा नफा किंवा तोटा शोधा? व टक्केवारीत गणना करा.



उत्तर : गोपालने खालील पध्दतीने प्रश्न सोडविला :

टि.व्ही. ची खरेदी किंमत (CP) = ₹ 9000

टि.व्ही. ची विक्रि किंमत (SP) = ₹ 10,000

खरेदी किंमत विक्रि किंमती पेक्षा कमी आसल्यास नफा होतो.

नफा (P) = ₹ 10000 – ₹ 9000 = ₹ 1000

यावरून, खरेदी किंमत ₹ 9000 आहे. दुकानदाराला ₹ 1000 चा नफा झाला.

नफा व खरेदी किंमतीचे गुणोतर $\frac{1000}{9000}$ आहे.

शेडा नफा शोधन्यासाठी या गुणोतराला 100% ने गुणाकार करू.

म्हणून, $\frac{1000}{9000} \times 100\% = \frac{100}{9}\% = 11\frac{1}{9}\%$

मधुने हा प्रश्न शोधण्यासाठी परिमाणाचा वापर केला.

जेव्हा खरेदी किंमत ₹ 9000 आहे, नफा ₹ 1000 आहे.

आता जर खरेदी किंमत ₹ 100 आहे. समजा नफा ₹ x आहे.

आपल्याला माहीत आहे खरेदी किंमत व नफा हे सम प्रमाणात आहेत नफा व खरेदी किंमतीचे गुणोत्तर हे दोन्ही उदाहरणात सारखे राहील.

म्हणून, $x : 1000 = 100 : 9000$

$$\frac{x}{1000} = \frac{100}{9000}$$

$$9000 \times x = 1000 \times 100$$

$$x = \frac{1000 \times 100}{9000} = 11\frac{1}{9}.$$

यावरून, शेकडा नफा $= 11\frac{1}{9}\%$

सरावासाठी

12 आंब्याची खरेदी किंमत ही 5 आंब्याच्या विक्री किंमतीच्या बरोबरीत आहे तर तोटा शोधा.

उदाहरण 16 : समजा एका व्यक्तीने ₹ 650/- ला उपकरणे विकत घेतले आणि त्याला विक्री करून 6% मिळविले तर विक्री किंमत किती ?

उत्तर : रविने अशा प्रकारे सोडवले :

खरेदी किंमत = ₹ 650

मिळविले = 6%

म्हणून, जर खरेदी किंमत ₹ 100 आहे तेव्हा ₹ 6 मिळविले आणि विक्री किंमत आहे 100 + 6 = ₹ 106

आता जेव्हा खरेदी किंमत ₹ 650 आहे तर समजा विक्री किंमत ₹ x आहे..

खरेदी किंमत व विक्री किंमत ह्या सम प्रमाणात आहेत.

म्हणून खरेदी किंमतीचे गुणोत्तर = विक्री किंमतीचे गुणोत्तर

$100 : 650 = 106 : x$

$$\frac{100}{650} = \frac{106}{x}$$

म्हणून, $100\,x = 106 \times 650$

म्हणून, $x = \dfrac{106 \times 650}{100} = 689$

यावरून, विक्री किंमत = ₹ 689

अरूनने अशा पद्धतीने सोडवल :

खरेदी किंमत = ₹ 650

नफा % = 6%

यावरून, नफा = 650 वर 6%

$$\frac{6}{100} \times 650 = 39$$

आपल्याला माहीत आहे विक्री किंमत = खरेदी किंमत + नफा

$= 650 + 39 = 689$

यावरून, विक्री किंमत = ₹ 689

उदाहरण 17 : रमेशने ₹ 2800 ला डी.व्ही.डी. प्लेअर विकला. यात त्याला 12% मिळाले तर त्याने तो किती रूपयाला विकत घेतला होता?

उत्तर : नाईक ने प्रमाणाचा वापर केला :

मिळकत % = 12%

विक्री किंमत = ₹ 2800

जर खरेदी किंमत ₹ 100 आहे तर विक्री किंमत ₹ 112 आहे.

जेव्हा विक्री किंमत = ₹ 2800 समजा तेव्हा खरेदी किंमत ₹ x आहे.

खरेदी किंमत व विक्री किंमत हया सम प्रमाणात आहे.

$x : 100 = 2800 : 112$

$$\frac{x}{100} = \frac{2800}{112}$$

म्हणून , $112 \times x = 100 \times 2800$

म्हणून , $x = \frac{100 \times 2800}{112} =$ ₹ 2500

खरेदी किंमत = ₹ 2500

मिनाने एकक पद्धतीचा वापर केला.

विक्री किंमत = 2800

नफा = 12%

जर CP = 100, म्हणून नफा 12 रुपये

विक्री किंमत = 100+12=112

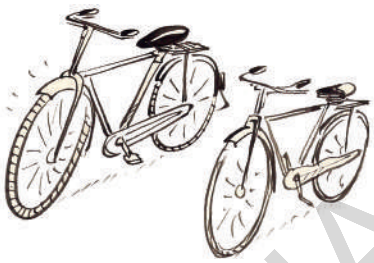
म्हणून जेव्हा विक्री किंमत ₹ 112 तेव्हा खरेदी किंमत ₹ 100 आहे

म्हणून जेव्हा विक्री किंमत 1 तेव्हा खरेदी किंमत $\frac{100}{112}$ आहे.

म्हणून विक्री किंमत ₹2800 तर खरेदी किंमत $\frac{100}{112} \times 2800$ = ₹ 2500

म्हणून खरेदी किंमत = ₹ 2500

उदाहरण 18 : एक मनुष्य 2 सायकल प्रत्येकी 3000 रू ला विकतो एका सायकलवर 20 टक्के मिळतात आणि दुसरीवर 20 टक्के कमी मिळतात तर त्याच्या पुर्ण व्यवहारात शेकडा नफा किंवा तोटा शोधा.



उकल : विक्री किंमत = 3000

पहिल्या सायकल वरील नफा = 20 टक्के

पहिल्या सायकल वरील तोटा = 20 टक्के

पद्धत 1 एकांक पद्धत वापरून

पहिल्या सायकलसाठी

जर खरेदी किंमत 100 आहे तर नफा 20 रू आणि

विक्री की. $= 100 + 20 =$ ₹120

आता विक्री की. 3000 रू आहे तेव्हा खरेदी $= \frac{100}{120}$ आहे

आता जर विक्री की. 3000 रू आहे तेव्हा खरेदी आहे $= \frac{100}{120} \times 3000 = 2500$

दुसऱ्या सायकल साठी

जर विक्री किंमत 100 रुपये तेव्हा तोटा 20 आहे आणि खरेदी किंमत-विक्री किंमत= तोटा

$100 - 20 =$ ₹ 80

यावरून जर विक्री किंमत ₹ 80 आहे तेव्हा खरेदी किंमत = ₹ 100

आता जर विक्री किंमत 1 रुपया आहे तेव्हा खरेदी $= \frac{100}{80}$

आता जर विक्री किंमत 3000 रुपये आहे तर खरेदी किंमत $= \frac{100}{80} \times 3000$ = ₹ 3750

एकूण खरेदी किंमत = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

एकूण विक्री किंमत = ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000

असे दिसते की विक्री किंमत ही खरेदी किंमतीपेक्षा कमी आहे म्हणून

तोटा = 6250 – 6000 = ₹ 250

तोटा % $= \frac{\text{तोटा}}{\text{खरेदी किंमत}} \times 100 = \frac{250}{6250} \times 100 = 4\%$

पद्धत 2 परिमाण वापरून

ख.कि. वाढते वि की. वाढेल यावरून ख.की. आणि वि.की. हया सम प्रमाणात आहेत.

ख.कि.	वि.कि.
100	120
x	3000

यावरून खरेदी किंमतीचे गुणोत्तर = विक्री किंमतीचे गुणोत्तर

$100 : x = 120 : 3000$

$$\frac{100}{x} = \frac{120}{3000}$$

$100 \times 3000 = 120\,x$

$$\frac{100 \times 3000}{120} = x$$

$x = 2500$

यावरून विक्री किंमत (1 ली सायकल) = ₹ 2500

दुसऱ्या सायकलवर

ख.कि.	वि.कि.
100	80
x	3000

$100 : x = 80 : 3000$

$$\frac{100}{x} = \frac{80}{3000}$$

$$x = \frac{100 \times 3000}{80} = ₹\,3750$$

म्हणून 2 सायकलची पूर्ण खरेदी किंमत = ₹ 2500 + ₹ 3750

= ₹ 6250

सायकलची एकूण विक्री = ₹ 6000

म्हणजेच विक्री किंमत ही खरेदी किंमतीपेक्षा कमी आहे. म्हणजेच त्याला तोटा झाला.

तोटा = ₹ 6250 – ₹ 6000 = ₹ 250

म्हणून शेकडा तोटा = $\frac{250}{6250} \times 100 = 4\%$

पद्धत 3 पहिल्या सायकलची विक्री = 3000

नफा% = 20%

समजा ₹ x खरेदी किंमत

तर नफा = $\frac{20}{100} \times x = \frac{20}{100}x$

आपल्याला माहीत आहे की, विक्री किंमत = ख.कि. + नफा

यावरून, $x+\frac{20}{100}x = 3000$

$$\frac{100x+20x}{100} = 3000$$

$$\frac{120x}{100} = 3000$$

$$x = \frac{3000 \times 100}{120} = ₹2500$$

पहिल्या सायकलची खरेदी किंमत = ₹ 2500

पहिल्या सायकलची विक्री किंमत = ₹ 3000

तोटा % = 20%

समजा खरेदी किंमत ₹ x

तेव्हा तोटा= $\frac{20}{100} \times x = \frac{20}{100}x$

आपणास माहित आहे की, विक्री किंमत = खरेदी किंमत - तोटा

यावरून, $x-\frac{20}{100}x = 3000$

$$\frac{80}{100}x = 3000$$

$$80\ x = 3000 \times 100$$

$$x = \frac{3000 \times 100}{80} = ₹\ 3750$$

यावरून दुसऱ्या सायकलची खरेदी किंमत = ₹ 3750

म्हणून दोन्ही सायकलची एकूण खरेदी किंमत = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

सायकलची एकूण विक्री किंमत = ₹ 6000

विक्री किंमत ही खरेदी किंमती पेक्षा कमी आहे म्हणून त्याला तोटा झाला

तोटा = ₹ 6250 – ₹ 6000 = ₹ 250

म्हणून शेकडा तोटा = $\frac{250}{6250} \times 100 = 4\%$

उदाहरण 19 : उपकरणांची किंमत ही पहिल्या किंमतीपेक्षा दर वर्षी 20% ने कमी होते दोन वर्षांनंतर त्याची किंमत 19,200 रू आहे. तर त्याची मुळ किंमत ते शोधा.

उकल : दुसऱ्या वर्षाच्या अखेरीस उपकरणाची किंमत = ₹ 19,200

प्रत्येक वर्षी वीस टक्क्यांनी किंमत कमी होते.

समजा पहिल्या वर्षाच्या सुरुवातीला किंमत 100 आहे तर दुसऱ्या वर्षीच्या सुरुवातीला ती 80 रुपये होईल. उदा. ₹ 80 (100–20% चे 100)

सुरुवातीचे तीन वर्षे = ₹ 64 (80 – 20% of 80)

म्हणून वस्तूची किंमत तीन वर्षाअखेर 64 रुपये राहील.

दोन वर्षानंतर वस्तू ₹ 19200

समजा त्याची मूळ किंमत ₹ x.

मूळ किंमत प्रमाण = दोन वर्षानंतरचे प्रमाण

$x : 100 = 19200 : 64$

$$\frac{x}{100} = \frac{19200}{64}$$

$64\,x = 19200 \times 100$

$$x = \frac{19200 \times 100}{64}$$

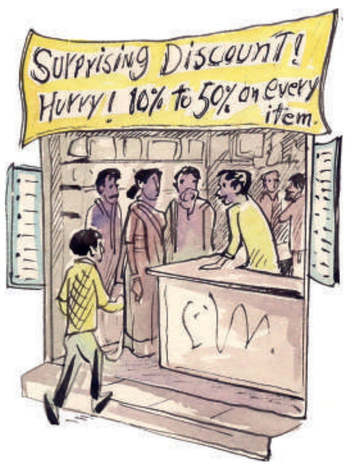
$= 30000$

मूळ वस्तूची किंमत ₹ 30000.

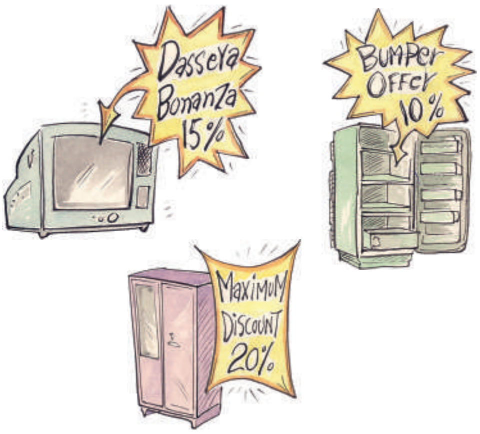
6.7.2 सूट

प्रसंग 1- खालील तक्त्यातील किंमती आणि सुट ची तुलना करा.

वस्तु	खरेदी किंमत	सुट%	सुट	विक्री किंमत
साडी	1000	10%	100	
कुर्ता	2000	20%	400	
शर्ट			97.50	552.50
टि.शर्ट	500	25%		375



प्रसंग 2 : तक्ता सुट दिलेल्या नुसार मांडा.



वस्तु	खरेदी किंमत	सुट%	सुट	विक्री किंमत
टी.वी.	5000	15%		
फ्रिज	10,000		1000	11000
अलमारी	4000	20%		

प्रसंग 3 : काही जून्या वस्तू विकण्यासाठी कधीकधी अनेक प्रकारच्या सूट दिल्या जातात.

उदाहरण 20 एका दूकानदाराने खरेदिकिंमतीवर 25% जास्त किमंत लिहीली 12% आणि सूट दिली त्याला काय फायदा झाला असावा.

उकल : समजा खरेदी किंमत ₹ 100.

नोंदवलेली किंमत = ₹ 100 + ₹ 25 = ₹ 125.

शेकडा सूट = 12%

सूट = $\frac{12}{100} \times 125$ = ₹ 15

विक्रि किंमत - खरेदी किंमत = नफा

= 125 – 15 = 110

नफा = विक्री किंमत - खरेदी किंमत

=110 – 100

= ₹ 10

नफा % = $\frac{10}{100} \times 100 = 10\%$

अशा प्रकारे विक्री नंतर दुकानदारा दहा टक्के नफा झाला.

स्वाध्याय - 5

1. एका दुकानदाराने 480 रूला विकत घेतलेली वस्तू 540रू विकली तर शेकडा नफा शोधा ?
2. अजयने एक टि.व्ही 15000 रू विकत घेतला आणि 14100 रूपयात विकला तर शेकडा तोटा शोधा?
3. रामुने एक प्लॉट 2,40,000 रूपयात विकला व त्याला 20% नफा मिळाला तर त्याने तो किती रूपयात विकत घेतला.
4. एका दुकानदाराने 750 रू ला मोबाईल विकला तर त्याला 10% तोटाझाला तर 5% नफा मिळवायचा असेल तर त्याला तो किती रूप्याचा विकावा लागेल.
5 एका शेतकऱ्याने 2 बैल प्रत्येकी 24000 रू विकले एका बैलावर 25% त्याला मिळाले आणि दुसऱ्या बैलवर त्याने 20% गमावले तर त्याचे शेकडा नफा किंवा तोटा शोधा.
6. श्राव्याने 480 रू ला घडयाळ विकत घेतले तिने ते रिद्धी ला विकले व $6\frac{1}{4}$ % मिळविले तर दिव्याने किती रूपये त्यासाठी दिले ?
7. एका पुस्तकाची छापील किंमत 225 रू आहे प्रकाशनाने त्यावर 10% सुट दिली तर त्याची विक्री किंमत शोधा.
8. एका सुताराने त्याच्या मालावर 15% सुट दिली त्याने एक खुर्ची 680 रू विकली तर त्याची छापील किंमत शोधा.
9. एका डिलर ने 10% सुट दिली तरीही त्याला त्यावर 10% मिळाले जर खरेदी किंमत 900रू आहे तर त्याची छापील किंमत किती ?

6.7.3 सरळ व्याज

रमय्या जवळ 10,000 रू आहे. त्याला 15,000 रूपये पाहीजेत त्याने शेतकरी बँक मॅनेजरला मागणी केली, खाली त्याचे संभाषण आहे.

रमय्या : सर मला काही शेतीच्या कामासाठी पैसे हवे आहेत.

बॅकमॅनेजर : तुम्हाला किती रूपयाची गरज आहे ?

रमय्या : 5000 रू

बॅकमॅनेजर : किती दिवसात तुम्ही परत कराल ?

रमय्या : एका वर्षात

बॅकमॅनेजर : तुम्हाला त्यावर 6टक्के व्याज द्यावे लागेल व तुम्ही घेतलेले रक्कमही एका वर्षात द्यावे लागेल.:

रमय्या : हो सर मी एका वर्षांनी सर्व पैसे परत करेल.

बॅकमॅनेजर : तुम्हाला माहीत आहे का एका वर्षानंतर तुम्हाला किती रूपये द्यावे लागतील.

रमय्या : हो, 100 रूपयावर मला 6 रू द्यावे लागतील.

म्हणून 1 रुपयावर आपल्याला ₹ $\frac{6}{100}$ आणि ₹ 5000, आपल्याला द्या ₹ $\frac{6}{100} \times 5000$

द्यावे लागतील ती आहे ₹ 300. ₹ 5300 ची एकूण रक्कम मला द्यावी लागेल.

जो काही कालावधी पैसे परत करण्यासाठी दिला जातो त्यास मुदल असे म्हणतात. हे पैसे उसने घेणारा हा पैसा काही दिवस वापरतो हे पैसे त्याने घेतल्यामुळे त्याला काही जास्तीचे पैसे बैकेला द्यावे लागतात आणि हयाच पैशाला व्याज म्हणतात.

रक्कम म्हणजेच बॅकेला परत करावी लागणारी रक्कम ही उसणे घेतलेली मुद्दल आणि व्याज यांच्या बेरजेच्या समान आहे.

रक्कम = मुद्दल + व्याज

सर्वसाधारणपणे व्याज हा मुद्दलच्या टक्केवारीत एका वर्षांच्या कालावधीसाठी मोडला जातो. त्याला म्हणल्याप्रमाणे लिहीले जाते. 10% प्रति वर्षी किंवा संक्षीप्त स्वरूपात 10% द.सा (दर साल / प्रती वर्षी)10% द.सा. म्हणजेच 100रू घेतले तर तुम्हाला एका वर्षांसाठी 10 रू त्यावर व्याज द्यावे लागते एका उदाहरणावरून हे काम कसे करतात. ते पाहू

उदाहरण 21 सुनिताने 5000रू लोन 12% व्याजाने घेतले तीला वर्षाअखेरीस कितर रूपये व्याज द्यावे लागतील ते शोधा.

उकल : मुद्दल 5000रू व्याजाचा दर 12% द.सा.

जर 100 रू कर्ज घेतले तर सुनीताला 12 रु. एका वर्षासाठी व्याज द्यावे लागेल.

तीने घेतलेली रक्कम 5000रू आहे तर ती एका वर्षांसाठी द्यावे लागणारे व्याज

$$= \frac{12}{100} \times 5000 = ₹\ 600$$

म्हणून तीला वर्षाअखेरी 5000रू + 600रू = 5600 रु. एवढी रक्कम द्यावी लागेल.

सर्वसाधारणपणे जेव्हा मु आहे मुद्दल, द आहे दर, प्रती वर्षाचे व्याज आणि वर्षाच्या अखेरीस उचलणार असलेले रक्कम आहे.

$$\text{रक्कम} = \text{मुद्दल} + \frac{\text{मुद्दल ह्न दर}}{100}$$

जर समस्या काही कारणांमुळे पुर्ण रक्कम देऊ शकली नाही तर मॅनेजरला केलेल्या विनंतीमुळे कर्ज हे आणखी एका वर्षापर्यंत वाढू शकले पुढील वर्षी ही व्याज हे 300 रू राहील यावरून रमय्याला 2 वर्षासाठी घेतले 18 टक्के व्याज 3 वर्षाच्या अखेरीस द्यावे लागणार 18 +18+ 18 = 3ह्न18= 54 रुपये

जसे वर्षाची संख्या वाढेल तसे व्याजही वाढेल हे व्याज वाढत जाते पुर्वीच्या व्याजाएवढया प्रमाणात दर वर्षी त्यालाच सरळ व्याज म्हणतात.

जर साधारणपणे मुद्दलासाठी = P, व्याजासाठी = R and कालावधीसाठी = T हे तर

सरळव्याज (I) = P×R%×T or $P \times \frac{R}{100} \times T = \frac{PRT}{100} = \frac{PTR}{100}$

सरावासाठी

1. 3 वर्षासाठी 8% प्रती वर्षी दिलेल्या 8250 रू या रकमेवरील व्याज शोधा.
2. व्याजाचा दर 9% असतांना 3000रू घेतले आहेत तर 2½ वर्षाच्या अखेरीस पर्यंत घेतलेल्या रकमेचे व्याज शोधा.

उदाहरण 22 किती वर्षात/ वेळेत 6880रू रक्कम ही 7224 रू होईल जर सरळ व्याज हे प्रतीवर्षी 10% आहे.

उकल : रक्कम = ₹ 7224

मुद्दल = ₹ 6880

सरळ व्याज = रक्कम - मुद्दल= ₹ 7224 – ₹ 6880 = ₹ 344

R% = 10%

आता $I = P \times \frac{R}{100} \times T$

$344 = 6880 \times \frac{10}{100} \times T$

344 × 100 = 6880 × 10 × T

म्हणून, $T = \frac{344 \times 100}{6880 \times 10} = \frac{1}{2}$ वर्षे = 6 महिने

उदाहरण 23 एकूण रक्कमेवर 3927 रू व्याज मिळविले ते 2 वर्ष 4 महीन्यात आणि 8 टक्के प्रती वर्षावर तर एकूण मुद्दल किती

उत्तर : सरळव्याज = रू 3927

मुदत = 2वर्ष + 4 महीने

$\left(2+\frac{4}{12}\right)$ Yrs.

$\left(2+\frac{1}{3}\right)$ Yrs. $= \frac{7}{3}$ Yrs.

सूत्रात ठेवून $I = P \times \frac{R}{100} \times T$

$3927 = P \times \frac{8}{100} \times \frac{7}{3}$

$3927 \times 100 \times 3 = P \times 8 \times 7$

म्हणून, $P = \frac{3927 \times 100 \times 3}{8 \times 7}$

म्हणून, P = ₹ 21037.50

म्हणून मुद्दल = ₹ 21037.50

उदाहरण 24 : 6360 रू मुद्दल वर 1378 रू व्याज हे 21/2 वर्षात असल्यास दर प्रती वर्षी किती होईल?

उत्तर : मुद्दल (P) = ₹ 6360

म्हणून (T) $= 2\frac{1}{2}$ वर्षे $= \frac{5}{2}$ वर्षे

सरळ व्याज (S.I) = ₹ 1378

सूत्रात ठेवून $I = P \times \frac{R}{100} \times T$

$1378 = 6360 \times \frac{R}{100} \times \frac{5}{2}$

$1378 \times 100 \times 2 = 6360 \times 5 \times R$

म्हणून $= \frac{1378 \times 100 \times 2}{6360 \times 5} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}\%$

उदाहरण 25 : मुद्दल 16 वर्षात तीप्पट होत असेल तर प्रती वर्षी दर काय राहील. ?

उकल समजा मुद्दल रक्कम = ₹ x

16 वर्षानंतरची होणारी रक्कम = ₹ $3x$

रक्कम – मुद्दल = व्याज

म्हणून, $3x - x = 2x$

म्हणून $P = x$, $T = 16$, $I = 2x$

$$I = P \times \frac{R}{100} \times T$$

$$2x = x \times \frac{R}{100} \times 16$$

$$2\,x \times 100 = x \times 16 \times R$$

म्हणून, $R = \frac{2x \times 100}{x \times 16} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}\ \%$

स्वाध्याय 6

1. 12600 रू हे 9% प्रती प्रमाणे गुंतवले असता 15624 रू होण्यासाठी किती वेळ लागेल ?
2 एक रक्कम स्वपद्धतीने दुप्पट 8 वर्ष 4 महिन्यात होत असेल तर दर काय आहे.
3 शाळेतील विद्यार्थ्यांसाठी लहान मुलांच्या बँकेने एक बचतीची योजना सांगितली त्यांनी एक लहान बॅक मुलांना देण्यात येण्याचे संगितले लहान मुले त्यात पैसे जमा करतील आणि बॅक ही वर्षातूण एकदा सर्व पैस जमा करेल मुलांच्या बचतीला प्रोत्साहन देण्यासाठी त्यांनी 6% व्याज हे 10000 रू किंवा जास्त रूपयांवर आणि एरवी 5% जर डिपॉजिट 9000 रू असेल तर एका वर्षांत शाळेतून किती व्याज उचलल्या गेले ते शोधा.
4. चार वर्षात 6500रू रक्कम ही 8840 रू एका विशिष्ट व्याजावर आहे तर 1600 रू रक्कमला 1816 रू होण्यास व्याजाचा दर ही समान असल्यास किती वेळ लागेल ?

चला व्याज मिळवुया

मुलांनो ! चला आपण सरळ व्याजावर एक खेळ खेळूया.

5 जणे हा खेळ खेळू शकतात

1. 3 मोठया आकाराची पसरट भांडी घ्या त्यावर PRT नावे द्या. प्रत्येक कागदावर नंबर टाकुन पाच कागद एका थोडयात या प्रमाणे टाका.

   (टिप :- सर्व भांडयातील नंबरला 100 किंवा 1000 ने गुणाकार करा.)

2. 3 कागदाचे तुकडे प्रत्येकी एका भांडयातून एका नंतर एक असे उचला.

3. जो कागदाच्या भांडयातून उचलला तो मुदत किंवा वेळेशी संबंधीत ठेवा आणि त्या भांडयातून उचलला तो व्याजाच्या दराशी संबंधीत ठेवा/ आहे.

4. आता व्याजाची गणना करा आणि प्रत्येकाला व्याज मुद्दल मुदत आणि दर सांगा.

5. जर तुम्ही योग्य उत्तर सांगीतले तर तुमच्या खात्यात व्याजाची रक्कम लिहा नाहीतर '0' तुमच्या खात्यात लिहा.

सुचना :- तुमच्या इच्छेप्रमाणे दोन किंवा तीन वेळेस तुम्ही खेळा आणि खाली दिलेल्या तक्त्यात तुमच्या किंमती मांडा.

व्याजाची रक्कम				
नाव	1 ली फेरी	2 री फेरी	3 री फेरी	एकूण

पाठ्यावलोकन

गुणोत्तराचा वापर करून बऱ्याच वेळेस आपण संख्याची तुलना करतो. दा माझी मिळकत 10000 रू आहे. व माझ्या मित्राची 20000 रू यावरून माझी रक्कम ही माझ्या मित्राच्या आर्धी आहे. किंवा माझ्या मित्राची मिळकत माझ्या मिळकतीच्या दुप्पट आहे.

माझ्या मिळकतीचे व मित्राच्या मिळकतीचे गुणोत्तर हे 1 : 2 आहे आणि मित्राचे व माझी मिळकत आहे तीचे गुणोत्तर 2 : 1 आहे.

जेव्हा दोन गुणोत्तर हे सारखे असतात तेव्हा ते परिणामात आहेत असे आपण म्हणतो परिमाणाची कल्पना ही आपल्याला रोजच्या जीवनात बरेच प्रश्न सोडवण्यास मदत करते.

जर एखादी संख्या ही वाढली तर त्यामुळे दुसरी ही वाढते यालाच सम प्रमाणात म्हणतात.

गुणोत्तर टक्केवारीत मांडू शकतो. शेकडा या शब्दाचा अर्थ आहे. प्रत्येक शंभर मधून किंवा शंभरावर टक्केवारीचे चिन्ह % हे आहे. 13% म्हणजे 100 पैकी 13

$$13\% = \frac{13}{100} = 0.13$$

टक्केवारीचा उपयोग हा बऱ्यात ठिकाणी केला जातो जसे की नफा किंवा तोटा सुट आणि सरळ व्याज इत्यादी.

गुणोत्तराच्या गमती

1, 2, 3,.....9 हे आकडे अशा प्रकारे ठेवा की त्यांचे गुणोत्तर 1:2 असे येईल.

$\frac{7329}{14658} = \frac{1}{2} = 1:2$ हे आश्चर्यकारक आहे.

परंतु याहीपेक्षा आणखी आश्चर्यकारक म्हणजे 1 ते 9 हे आकडे गुणोत्तराच्या प्रमाणात 1:3, 1:4, 1:5, 1:6, 1:7, 1:8 and 1:9 मांडता येतात. अशाच गमती आणखी शोधा.

माहितीचे व्यवस्थापन

7

7.0 प्रस्तावना

रवी वर्तमानपत्रातील स्पोर्टन्यूज वाचत आहे. त्यात खेळाचे दोन तक्ते दिले आहे.

विश्वकप 2011चे फलंदाज

फलदांजाचे नाव	धावा
टि.दिलशान ,(श्रीलंका)	500
सचिन तेंडूलकर, (भारत)	482
के. संघकारा, (श्रीलंका)	465
ट्रोट, (इंग्लंड)	422
यू. थरंगा, (श्रीलंका)	395

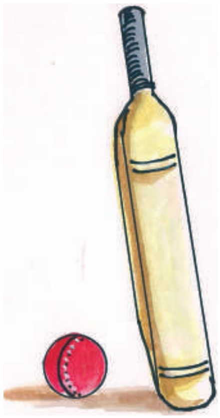
तक्ता - 1

विश्वकप 2011चे गोलंदाज

गोलदांजाचे नाव	विकेटस
अफ्रिदी, (पाकिस्तान)	21
जहिरखान, (भारत)	21
टी जी सौथी, (न्युझीलँड)	18
पिटरसन, (द.अ.)	15
एम. मुरलीधरण, (श्रीलंका)	15

तक्ता -2

हे दोन तक्ते काय सांगतात ?



तक्ता-1 फलंदाजाचे नाव दिले आहे, व त्यांच्या विश्वकप मधिल सर्वाधिक धावा दिल्या आहे.

तक्ता- 2 गोलंदाजाचे नाव दिले आहे,व त्यांच्या विश्वकप मधिल सर्वाधिक विकेटस दिल्या आहे. या वरून आपणास अनुमान लावता येईल की,विश्वकप मधिल बक्षिसास पात्र कोण असू शकतो.

सूचना जी की, अंकात किंवा अक्षरात दिली जाते.त्यास सामग्री असे म्हणतात

अस्या दिलेल्या सामग्री वरून आलेख काढाता येते.

अंकात दिलेल्या सामग्रीलाच 'निरीक्षण' असे म्हणतात.

सरावासाठी

तुमच्या शाळेतील सूचना फलक पाहा.त्यावर आपणास एखादी सामग्री दिसते काय ?
शोध लावा ती कोणी व का वापरली असेल.

7.1 सामग्रीचे संघटन

खाली जवाहर बाल रक्षा योजना मार्फत इयत्ता 8 वीच्या 7 विद्यार्थ्यांची माहिती दिली आहे.

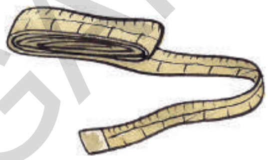
कृष्णाने ती आपल्या वहीत अशी लिहीली.

अमला - 125 सेमी, लेख्या - 133 सेमी, तबसूम - 121 सेमी, सुधा - 140 सेमी,

वनजा- 117सेमी लेनीन - 129 सेमी आणि राजेश - 132 सेमी

दुसरा विद्यार्थी कुमारने अशी लिहीली

विद्यार्थ्यांचे नाव	उंची सेमी मध्ये
वनजा	117
तबसूम	121
अमला	125
लेनीन	129
राजेश	132
लेख्या	133
सुधा	140



यावरून आता विचारलेल्या प्रश्नाची उत्तरे दया.

(i) सर्वांत उंच विद्यार्थी कोण ?

(ii) सर्वांत बुटका विद्यार्थी कोण ?

(iii) अमला व राजेश यात मध्यंतर उंची कोणाची ?

तुम्ही कोणाची सामग्री उत्तरासाठी वापरू शकता ? कृष्णाची किंवा कुमारची ? तुम्ही कुमारची सामग्री वापरा ती सोपी जाईल.

सरावासाठी

घटक चाचणी परीक्षेत अमरला पुढीलप्रमाणे गुण मिळाले आहे. 20,18,23,21,24 आणि 22 गुण अनुक्रमे तेलूगू, हिंदी, इंग्रजी, गणित, विज्ञान आणि सामाजीक शास्त्र व पेपरला, 23,21,20,19,24 आणि 17 गुण मिळाले यावरून सामग्रीची मांडणी करा.

सरावासाठी

वजन काट्यावर वर्गातील विद्यार्थ्याचे वजन करा व चढत्या उतरत्या क्रमाने मांडणी करून खालील प्रश्नाची उत्तरे द्या

1. सर्वांत कमी वजन कोणाचे ?
2. 25 किलो पेक्षा जास्त वजन किती विद्यार्थ्यांचे आहे?
3. 20 ते 30 किलो दरम्यान किती विद्यार्थ्यांचे वजन आहे.

7.2 प्रातिनिधीक स्वरूपाचे मूल्य :

वसतीगृहामध्ये.

- सरासरी मूलांना दररोज 150 ग्राम तांदूळ लागतो.
- बालकांचे वय सरासरी 13 वर्ष
- बालकांची उंची 135 सेमी आहे.

या सामग्रीचा अभ्यास केल्यास प्रत्येक बालक 150 ग्राम तांदूळ घेतो काय ? काय प्रत्येकाचे वय 13 वर्षेच आहे काय ?

प्रत्येकाची उंची काय 135 सेमीच असेल काय ? खरच नाही.काहीना कमी तांदूळ लागतो काहींना जास्त लागतो.

असेच, 150 ग्राम आपणास युक्ती दाखवीतो की, वस्तीगृहात किती तांदूळ लागेल याची.

13 वर्षे वस्तीगृहातील बालकाचे वय दाखवितो. यालाच अंकगणितीय मध्य किवा मध्यांक म्हणतात.

7.3.1 अंकगणितीय मध्य

शारीरीक शिक्षण शिक्षकाने आपल्या विद्यार्थ्यांना सूचना सरावासाठी सांगितल्या त्यापैकी राजेंद्रचा आठवड्यातील सराव वेळापत्रक असे.

वार	सोम	मंगळ	बुध	गुरू	शुक्र	शनी	रवी
मिनीटे	20	35	40	30	25	45	15

यावरून आपण प्रत्येक दिवसाची सरासरी काढू शकतो काय ? चला निरीक्षण करू या.

सरावासाठी राजेंद्र आठवाड्यात किती वेळ खर्च करतो ?

एकूण वेळ $= 20 + 35 + 40 + 30 + 25 + 45 + 15 = 210$ मिनीटे

हाच सरासरी वेळ दररोज सरावासाठी खर्च केल्या जातो.

सर्व दिवसाच्या वेळेची बेरीज करून त्यास एकुण संख्येने भागल्यावर सरासरी वेळ प्राप्त होईल.

उदा. $\dfrac{20+35+40+30+25+45+15}{7} = \dfrac{210}{7} = 30$ मिनीटे

वरील उदाहरणातून दर दिवशी दर ताशी किती वेळा सराव केला याची माहिती आपणास मिळते.

उदाहरण 1 : एका भाजी विक्रेत्याची रोजची कमाई रू.200,150,180,300,160,170 व 170 आहे तर त्यांची सरासरी कमाई काढा.

उत्तर : एकूण मिळकत = 200+150+180+300+160+170+170

= ₹1330

एकूण दिवस = 7

सरासरी किमतीचा मध्य = $\frac{1330}{7}$ = ₹ 190

याच साम्रगीला मध्य किंवा मध्यांक म्हणतात.

गणित मध्य किंवा सरासरी(ग.म.) $\dfrac{\textbf{सर्वप्रांतांकाची बेरीज}}{\textbf{सर्वप्रातांकाची संख्या}}$

सरावासाठी

1. खेळाडूंची वयाची संख्या वर्षांमध्ये 16,16,16,14,17,18 दिली आहे तर खालील प्रश्नांची उत्तरे शोधा.

   (i) सर्वांत तरूण व जुन्या खेळाडूचे वय काय.

   (ii) खेळाडूंची सरासरी काय.

   आपण रोज पाणि किती ग्लास पितो याची सरासरी तुम्ही कशी काढाल.

7.3.2 मध्य कोठे दंडलेले असेल ?

अनिल, अमर, अँथोनी, आणि ईदर यांना तेलगू,हिंदी, आणि इंग्रजीत खालीलप्रमाणे गुण मिळाले ?

	तेलूगू	हिंदी	इंग्रजी
अनिल	15	8	10
अमर	10	10	12
अँथोनी	11	6	11
इंदर	12	12	13

आता या विद्यार्थ्यांचे सरासरीचे गणन करूया.

तेलूगू	हिंदी	इंग्रजी
$AM = \frac{15+10+11+12}{4}$	$AM = \frac{8+10+6+12}{4}$	$AM =$………
$= \frac{48}{4}$	$= \frac{36}{4}$	= ………
= 12	= ……..	= ………
सर्वाधीक गुण = 15	सर्वाधीक गुण = …….	सर्वाधीक गुण = …….
सर्वांत कमी गुण = 10	सर्वांत कमी गुण = …….	सर्वांत कमी गुणs = …….
मध्य = 12	मध्य = …….	मध्य = …….

तुम्हास असे दिसेल किंवा सामग्री जसी चढत्या उतरत्या क्रमाने येते तसेच मध्य सुद्धा येतो.

माहितीचा मध्य हा नेहमी सर्वोच्च आणि कनिष्ठ पातळीच्या मध्यभागी असतो.

7.3.3 प्राप्तांकाचे मध्य

उदाहरण 2 : एका कुटूंबातील कृष्णा, राधिका, निहारीका, आणि निखिल यांचे वय 44,39,17 आणि 12 आहेत. तर 1) त्यांच्या वयाचे गणितीय मध्य काढा. 2) पाच वर्षापूर्वीचे वय काढून त्यांचा मध्य काढा.3) वय आणि मध्य यांच्यातला बदल जाणवला का ?

उत्तर : व्यक्तींचे वय = 44, 39, 17, 12 वर्षे

कुटुंबातील व्यक्तीची संख्या = 4

वयाचे मध्य $= \frac{44+39+17+12}{4} = \frac{112}{4} = 28$ वर्षे

पाच वर्षांआधीचे वय = 44 – 5, 39 – 5, 17 – 5, 12 – 5

= 39, 34, 12, 7

$\therefore$ पाच वर्षांआधीचे वयाचे मध्य $= \frac{39+34+12+7}{4} = \frac{92}{4} = 23$ वर्षे

जसे 5 वर्ष वय कमी झाले त्याचप्रमाणे मध्य झाले तसेच 5 वर्षांनी मध्य कमी झाला.

आता आपण एका कुटूंबाचे तीन वर्षांपासून आतापर्यंत किंवा 10 वर्षांपासून आतापर्यंतचे मध्य काढूत.

तुम्हास असे दिसेल किंवा सामग्री जशी चढत्या उतरत्या क्रमाने येते तसेच मध्य सुद्धा येतो.

सरावासाठी

1. सामग्रीचे प्राप्तांक कमीत कमी 15 व जास्तीत 25 आहे तर मध्य काढा.

   (i) 12 (ii) 15 (iii) 21 (iv) 27

2. सामग्रीचे प्राप्तांक 23,45,33,21,48,30,46 व 35 गणन न करता मध्य काढा.

   (i) 20 (ii) 35 (iii) 48 (iv) 50

स्वाध्याय - 1

1. हैद्राबादचे तापमान जास्तीत एका सप्ताहातील (26 फेब्रु ते 4 मार्च 2011) चे नोंद घेतलेले ते असे

   26 °C, 27 °C, 30 °C, 30 °C, 32 °C, 33 °C and 32 °C.

   (i) आठवाडयातील सर्वाधिक तापमान किती ?

   (ii) आठवाडयातील सरासरी तापमान किती ?

2. शालेय मध्यान्ह भोजनासाठी पाच दिवसाचे तांदूळ 5 15.750 किग्रॅ, 14.850 किग्रॅ, 16.500 किग्रॅ, 14.700 कि.ग्र. आणि 17.700 किग्रॅ लागतात. पाचदिवसातील सरासरी काढा.

3. एका गावात तीन प्रकारची पिके घेतात त्यावरील लाभांश (रूपयांमध्ये), प्रती एकर असा दिला आहे

पिके	2005	2006	2007	2008
भुईमूग	7000	8000	7500	7500
ज्वारी	6000	1000	8000	1000
बाजरी	9000	5000	3000	4000

   (i) चार वर्षांचा लांभाशाचा मध्य काढा.

   (ii) तुमच्या मते पुढच्या वर्षी कोणती पिके घेणे सोयीचे राहील.?

4. APSRTC मार्फत रोज अदिलाबाद ते निर्मळ चार फेऱ्यामध्ये 39,40,45 व 54 प्रवासी प्रवास करतात. त्यांचे व्यावसायिक प्रमाण एका दिवसासाठी किती असेल.

5. खालील तक्ता अंजू,निलू, लेख्या यांचे 4थी चाचणीचे गुण दर्शवितो

विद्यार्थ्याचे नाव	चाचणी -1	चाचणी -2	चाचणी -3	चाचणी - 4
अंजू	अनुपस्थित	19	23	21
नीलेश	0	20	22	24
लेख्या	20	24	24	24

(i) लेख्याचे सरासरी गुण काढा.

(ii) अंजूचे 3 ऱ्या, 4 थ्या चाचणीचे सरासरी काढा.

(iii) निलेशने चार चाचण्या दिल्या. त्याच्या 3 ऱ्या व 4 थ्या चाचणीची सरासरी काढा.

(iv) इंग्रजी विषयात सर्वाधिक गुण कोणाला मिळाले असतील

6. नाश्ता करण्यासाठी तीन मित्र उपहारगृहात गेले, त्यांचे बिल अनुक्रमे रू 16, रू 17, रू 21 खर्च झाले. (i) त्यांचा मध्य काढा .(iii) नित्य खर्चापेक्षा त्यांचा खर्च 3 पट असल्यास मध्यांक काय असेल (ii) जर त्यांना 50 : सूट दिल्यास खर्चाचा मध्यांक काय असेल (iv) तुम्हास माहीत आहे काय की, खर्च आणि खर्चाचा मध्यांक काय असेल ?

7. पहिल्या 10 नैसर्गिक संख्याचा मध्यांक काढा ?

8. पहिल्या 5 अविभ्याज्य संख्याचा मध्यांक काढा ?

9. पहिल्या 4 पुर्णांक संख्याचा संच, त्यापैकी लहानात लहान पूर्णांकाची सरासरी 102, लहानात लहान तीन पूर्णांकाची सरासरी 103, चारही संख्यांची सरासरी 104 आहे तर सर्वांत मोठा पूर्णांक कोणता असेल ?

10. सामग्रीला योग्य दोन प्रश्नांचा मध्यांक काढा ?

गृहपाठ

तुमच्या रस्त्यावर असणाऱ्या घरातील कुटुबाच्या सदस्यांची संख्या किती?

त्यांच्या कुटूंबातील सदस्याची सरासरी काढा ?

7.4 मध्यांक

दुसऱ्या प्रकारचे प्रतिनिधीत्व स्वरूपाचे मूल्य जे की, मध्यांक आहे त्यारून खालील उदा.अभ्यासा

उदाहरण 3 : दुकानदाराला गोडतेलाचा साठा ठेवायचा आहे,

त्याने आपल्या नोंदी आठवड्याच्या नोंदी खालील प्रमाणे ठेवल्या

दिवस	तेलाचे पॉकेट
सोमवार	GGGSSSSPP
मंगळवार	GGGSSSSSPP
बुधवार	GGSSSSSP
गुरूवार	GGGSSSP
शुक्रवार	GGGSSPP
शनिवार	GSSSSSSSS
रविवार	GGGSSSP

G = Ground nut oil packet, S = Sunflower oil packet, and P= Palmolein oil packet.

अशा प्रसंगी दुकानदाराने कोणता निर्णय घ्यावा.?

उत्तर : प्रथम दुकानदाराने सरासरी पॉकेट विकल्या गेले ते काढावे

$$\text{सरासरी पॉकेटची संख्या} = \frac{18+30+9}{3} = \frac{57}{3} = 19$$

दुकानदाराने प्रत्येक प्रकारचे 19 पॉकेटस् साठवावेत का ?

त्याने पुन्हा हा विक्रीचा अंक पाहीला त्यास दिसले की सुर्यफूल तेल जास्त विकल्या गेले,

पामोलीन तेलास कमी मागणी आहे.

जर का त्याने प्रत्येकी 19 पॉकेटस् मागविले तर सुर्यफुल तेल कमी पडेल

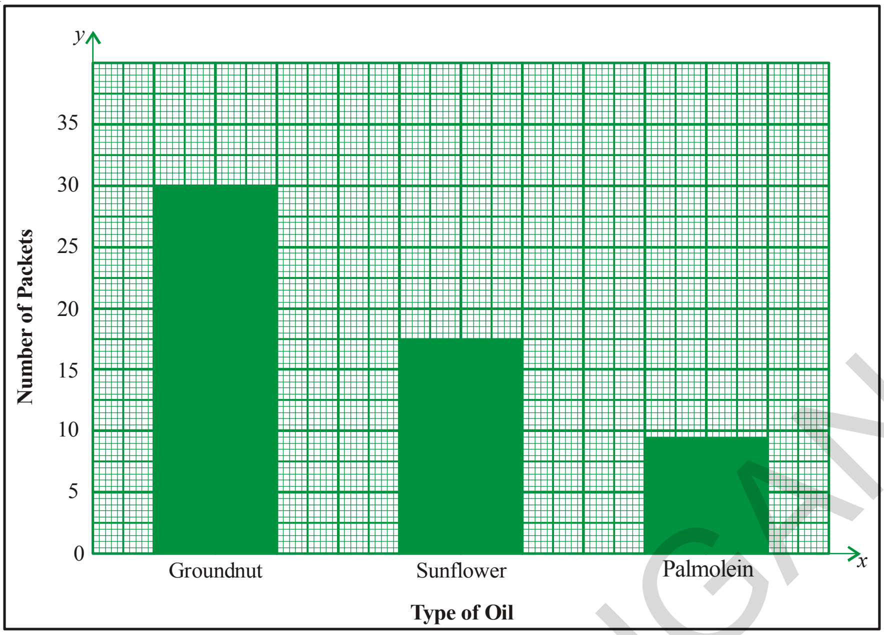
व पामोलीन तेल जास्त होईल.

दुकानदाराने सूर्यफूल वाढवावा व पामोलीन कमी करावा

तरच 30 पॉकेट शेंगदाणा तेल राहू शकते.

अशाच प्रमाणाला मध्यांक असे म्हणतात. आता आपण पुढे स्तंभालेख पाहणार आहोत.

जे पुढील पानावर दिले आहे. सर्वात लांब स्तंभ मध्यांकाची किंमत दर्शवतो



उदाहरण 4 : खालील संख्यासंचाचे मध्य काढा. 2,3,5,3,4,7,3,2,2,1,7,3

उत्तर : समान संख्या एकत्र मांडून 1,2,2,3,3,3,4,5,7,7, 3 या संख्याची वारंवारता जास्त असल्यामुळे मध्यांक = 3

उदाहरण 5 : खालील सामग्रीचा मध्य काढा, 3,5,9,6,5,9,2,9,3,5

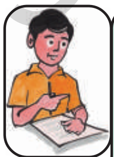
उत्तर : समान संख्या एकत्र माडून 2,3,3,5,5,5,6,9,9,9,येथे,5 आणि.

9,यांची संख्या समान वेळा आहे. उदा. 3 वेळा.

म्हणून दिलेल्या सामग्रीचे दोन मंध्याक ,ते, 5, आणि, 9

म्हणून अर्ध्या सामग्रीला 'व्दिमान सामग्री' म्हणतात.

टिप:- जर सामग्रीचा प्राप्तांक जर पुन्हा येत असल्यास दिलेल्या सामग्रीचा संचाला मध्य असतो.



सरावासाठी

खालील सामग्रीचा मध्य काढा

(i) 5,6,3,5,4,9,5,6,4,9,5

(ii) 25,14,18,15,17,16,19,13,12,24

(iii) 10,15,20,15,20,10,15,20,10,11,

उदाहरण 6 : 50 विद्यार्थी घटकचाचणीतील बसलेले होते 10 गुणांची घटकचाचणी घेण्यात आली मध्य काढा.

मिळालेले गुण	विद्यार्थी संख्या
00	2
1	1
2	2
3	1
4	-
5	4
6	10
7	15
8	9
9	5
10	1
एकूण	50

उत्तर :सामग्रीचा प्रांतांकातून 7 हे गुण सर्वाधीक मुलांना मिळाले आहे.

म्हणून मध्य = 7

टिप :- प्रातांक 7 हा 15 वेळा आलेला आहे. यात गोंधळाचे नाही.

उदाहरण 7 : खालील कोणत्या प्रसंगी दर्शनी मूल्यांचे मध्य योग्य असू शकते ?

(a) शर्ट विक्रेत्याला, कोणत्या मापाचे शर्टस जास्त मागणी घ्यावी लागेल.

(b) 20 लोकांच्या मेजवानीसाठी तांदूळ खरेदी करणे.

(c) शाळेतील वर्गाच्या दारांची उंची शोधणे.

उत्तर : (a) समजा पहिला प्रसंग दुकानदार 4 मापाचे विकतो, आणि त्याची फेब्रुवारी माहिण्याची

शर्टचे माप	संख्या
M	15
L	18
XL	40
XXL	22
एकूण	92

सरासरी शर्टची विक्री $\dfrac{12+18+40+22}{4} = 23$ शर्टस्

अशा प्रसंगी दुकानदाराने 23 शर्टस प्रत्येक मापाचे घ्यावे का ?

तर XL मापाचे शर्टस जास्त विक्रीला गेले आहे.

म्हणून XL कमी पडतील म्हणून त्यांने वारंवारता पाहावी लागेल.

(b) आपणास समजले नाही की, किती जास्त व किती कमी द्यावे

जर आपण 20 परीने जास्त घेवू तर वाया जातील.

20 पेक्षा कमी घेतल्यास पुरेसे होणार नाही म्हणून मध्य सांगू शकत नाही.

जर 5 दरवाजे असतील व त्यांची उंची 134 सेमी, 125 सेमी, 100 सेमी, 125 सेमी, व 144 सेमी पाहीजे

म्हणून येथे मध्य वापरू शक्त नाही.

सरावासाठी

1) दर्शनी मूल्य एखाद्या प्रसंगी असल्यास मध्य असतो ते प्रसंग शोधा.

2) दर्शनी मूल्य शोधा ज्याचा मध्यांक असू शकतो.

स्वाध्याय - 2

1. लांब उडीत, 7 विद्यार्थ्यांने सहभाग घेतला, 98 सेमी,125 सेमी, 140 सेमी, 155 सेमी, 174 सेमी, 140 सेमी, आणि 155 सेमी, तर त्याचा मध्यांक शोधा.

2. क्रिकेट टिमच्या खेळाडूचे वय 25,26,25,27,28,30,31,27,33,27,29 आहे.

   1) सामग्रीचा मध्यांक शोधा 2) कमीतकमी संख्या असल्यामुळे मध्यांक बदलू शकतो.

3. खालील सामग्रीचा मध्यांक शोधा. 12, 24, 36, 46, 25, 38, 72, 36, 25, 38, 12, 24, 46, 25, 12, 24, 46, 25, 47, 12, 24, 36, 25, 38, आणि 36

4. चांगल्या दर्शनी मुल्यांचा मध्य शोधा.

   1) दुकानदार वेगवेगळया प्रकारचे टूथपेस्ट विकतो.

   त्यांने कोणती मागणी करावी.

(ii) पर्यवेक्षकाने परिक्षा कक्षा मध्ये पुरेसे पुरवणी पेपर्स आणणे.

(iii) लग्नसमारंभात लाडूंची संख्या बनवावयाची आहे.

(iv) वर्गातील किक्रेटचे चाहते खेळाडू शोधणे.

7.5 मध्यमान

दर्शनी किंमतीवरून आपण सामग्रीचा मध्य शोधला. आता दुसऱ्या प्रसंगी आपणास मध्यमान शोधावयाचा आहे. खाली रूपयामध्ये मिळकत दिली आहे. ती कामगार व व्यवस्थापकाची आहे.

व्यवस्थापक	-	₹ 40,000
कामगार 1	-	₹ 3,300
कामगार 2	-	₹ 5,000
कामगार 3	-	₹ 4,000
कामगार 4	-	₹ 4,200
कामगार 5	-	₹ 3,500
कामगार 6	-	₹ 4,500
कामगार 7	-	₹ 4,200
कामगार 8	-	₹ 4,300
कामगार 9	-	₹ 3,500
कामगार 10	-	₹ 3,500

दिलेल्या मूल्यांवरून आपण सामग्रीचा मध्य, व मध्यमान काढू शकतो का ?

Let us calculate the mean salary in the production unit.

$$\text{पगाराचा मध्य} = \frac{\text{एकूण पगार}}{\text{कामगाराची संख्या}} =$$

$$\frac{3300+5000+4000+4200+3500+4500+4200+4300+3500+3500+40000}{11}$$

$$= ₹.7272.72$$

दिलेला पगार व्यवस्थापक किंवा कामगाराचा असू शकतो का ? नाही, हा कामगारापेक्षा जास्त पण व्यवस्थापकापेक्षा कमी आहे.

म्हणून आतां मध्यमान शोधू. 3500 ही सर्वांधीक वारंवारता आहे. ती 3 वेळा आणि आहे. परंतु ती दर्शनी सामग्री नाही.

मग दुसरा मार्ग शोधू व चढत्या क्रमाने मांडू या.

3300, 3500, 3500, 3500, 4000, 4200, 4200, 4300, 4500, 5000, 40000

मधली किंमत ही 4200 आहे. दोन विभागात विभागणी तर 5 लेकांना 4200 पेक्षा जास्त व 5 लोकांना 4200 पेक्षा कमी. तीच किंमत त्यांचा मध्यांतर आहे.

वरील प्राप्तांकात 11 संख्या आहे. ही विषम आहे. म्हणून दोन विभाग करता येतात जर तर संख्या सम असेल ?

आता नविन एक व्यक्ती रूजू झाला त्याचा पगार रू. 4000

पुन्हा चढत्या क्रमाणे मांडू.

3300, 3500, 3500, 3500, 4000, 4000, 4200, 4200, 4300, 4500, 5000, 40000

येथे 4000 आणि 4200 हे मध्यंतर आहे.

दोघांची सरासरी $=\frac{4000+4200}{2}=$ ₹.4100.

उदाहरण 8 : मासीक मिळकत 7 लोकांची 8000,9000,8200,7900,8500,8600 व 60,000 आहे. तर त्याची मध्यतंर शोधा.

उत्तर : चढत्या प्रमाणे मांडू 7900,8000,8200,8500,8600,9000 व 60,000

प्रात्यांक = 7

सामग्रीचा मध्यतर प्राप्तांक 4 था = 8500

म्हणून मध्यंमान मिळवुन = ₹8500

उदाहरण 9 : 49,48,15,20,28,17,14 आणि 110 चा रूपांतर शोधा.

उत्तर : चढत्या क्रमाने मांडून 14,15,17,20,28,48,49,110

प्रात्यांक = 8

मध्यंमान 4 था व 5 आहे 20 आणि 28

मध्यंतर = सरासरी 4 था व 5 वा प्राप्तांकाची $= \dfrac{20+28}{2} = 24$

मध्यंतर = 24

स्वाध्याय - 3

1. योग्य उत्तरास अशी खूण करा.

   (i) लहान आणि मोठया प्राप्तांकाच्या फरकास सामग्रीचा मध्य म्हणतात.

   (ii) स्तंभालेखामध्ये सर्वात मोठा स्तंभ मध्ये मध्यांक असु शकते.

   (iii) प्राप्तांकाची सामग्रीतील मूल्य घेवून मध्यमान काढता येतो.

   (iv) मध्यमान हे संचातील एक संख्या असते.

2. मासिक मिळकत (रूपयांमध्ये) खेड्यातील 7 घरांचे 1200, 1500, 1400, 1000, 1000, 1600, 10,000 आहे तर 1) मध्यमान काढा. 2) जर एका घराची मिळकत आणखी 1500 रू मिळविली तर मध्यमान काय होईल.

3. साम्रगीचा प्राप्तांक 16,72,0,55,65,55,10 आणि 41 आहे. चैतन्य ने मध्यांक व मध्यमान 0 न घेता काढले. ते बरोबर असेल काय ?

4. तिन संच घनपुर्णांक संख्याचा आहे. मध्य 6 मध्यमान 7 आणि मध्यांक शोधा.

5. चार पूर्णांक संख्या जर आपण 3,4,5,5 आणि 8 मध्ये मिळविळे तर मध्य, मध्यमान व मध्यांक प्रत्येकी 1 ने वाढतो तर त्या संख्या कोणत्या ?

खेळ खेळा

फासा घ्या 1,2,3,4,5 आणि 6 त्यावर अंक असतील तीन तीन मुलांचा गट बनवा. प्रत्येकाला फासा टाकायला सांगा व अंकाची नोद घ्या अश्या 10 वेळा द्या. आता प्रत्येकाला 10 वेळा टाकायला सांगा आणि त्यांचा मध्य, मध्यांक, मध्यमान काढा.

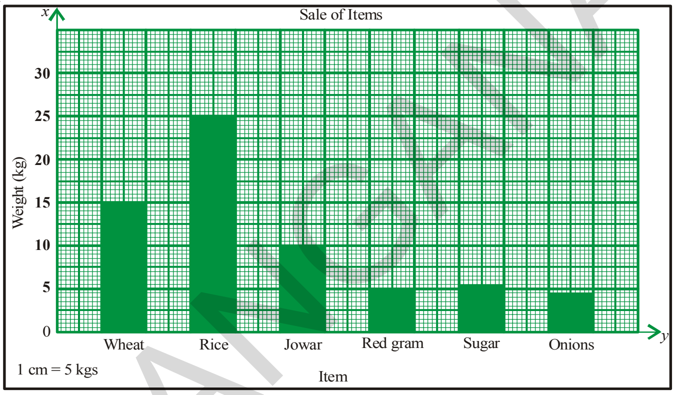
7.6 सामग्रीचे सादरीकरण

आपण सामग्री दाखविताना स्तंभालेख, चित्रालेख, 6 व्या वर्गामध्ये पाहिलात. आता चित्रावरून सामग्रीचे सादरीकरण बघू या. स्तंभालेख सामग्रीवरून कसा सादर करावा तो.

7.6.1 स्तंभालेख

या भागात आपण थोडे फार स्तंभालेखा विषयी शिकलेत यात आडव्या उभ्या ओळी असतात हे तुम्हाला माहिती आहे. आणि त्यांच्यातील अंतर परस्पराच्या म्हणजेच उभ्या आणि आडव्या स्तंभाद्वारे दाखवले जाते. या दोन्ही स्तंभावर दाखवलेली माहिती ही परस्पराशी निगडीत असते. खाली दिलेल्या दोन आलेखांचे निरिक्षण करा. पहिल्या आलेखामध्ये उभे स्तंभ अन्नधान्याची माहिती देतात. तर त्या खालच्या आलेखामध्ये आडवे स्तंभ विविध द्रव पदार्थांच्या उत्कलन बिंदूविषयी माहिती देतात. सारांश आलेखामधील माहिती ही नेहमी परस्परांच्या गुणोत्तराच्या प्रमाणात मांडायची असते.

उदाहरण 10 : दुकानात एका दिवसात विविध वस्तू विकल्या ते या स्तंभालेखात दाखविले आहे.



1) x अक्षावर व y अक्षावर काय दर्शविले आहे.

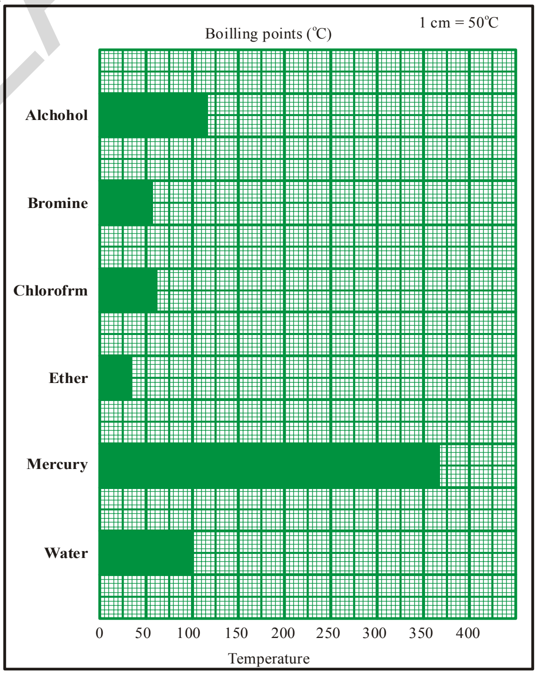
2) y अक्षावर कोणते प्रमाण घेतले आहे ?

3) कोणती किती विकली गेली ?

4) कांदा हा चना पेक्षा जास्त विकला काय ?

5) ज्वारी व चना यांचे प्रमाण काय ?

उदाहरण 11 : या स्तंभालेखाचे निरीक्षण करा.



(i) हा स्तंभालेख काय सुचविते ?

(ii) x व y अक्षावर काय घेतले आहे ?

(iii) सर्वोधीक उत्कलंक कोणत्या द्रव्याचा आहे ?

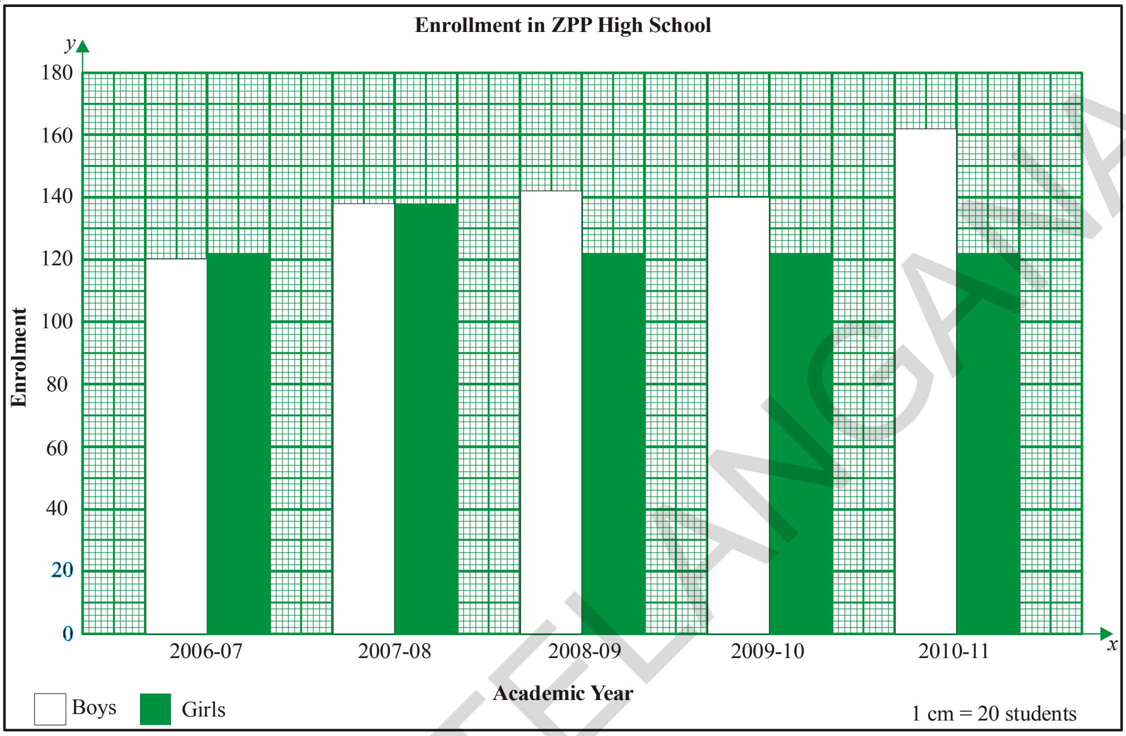
(iv) सर्वात कमी उत्कलंनाक कोणत्या द्रव्याचा आहे ?

(v) इथर व पारा यांचे प्रमाण काय ?

7.6.2 जोड स्तंभालेख

दुसऱ्या प्रकारचे स्तंभालेख शिकू या.

उदाहरण : 12 जि.प. हायस्कुलचे मुलामुलीचे सविस्तर प्रमाण दिले आहे. त्यावरून उत्तरे शोधा.



यात दोन स्तंभालेख दिसतात काय ? हे काय दाखवितात दुस-या वर्षीचा स्तंभ काय दर्शवितो ?

अशा प्रकारच्या स्तंभालेखास **जोडस्तंभालेख** म्हणतात.

(i) कोणत्या वर्षीची यादी मूलांपेक्षा मूली जास्त दाखविते.

(ii) कोणत्या वर्षीची यादी मुलींची संख्या कमी दाखविते.

(iii) कोणत्या वर्षी मुलेमुली समान आहे.

(iv) 2007-2008 च्या संपुर्ण यादीची संख्या किती ?

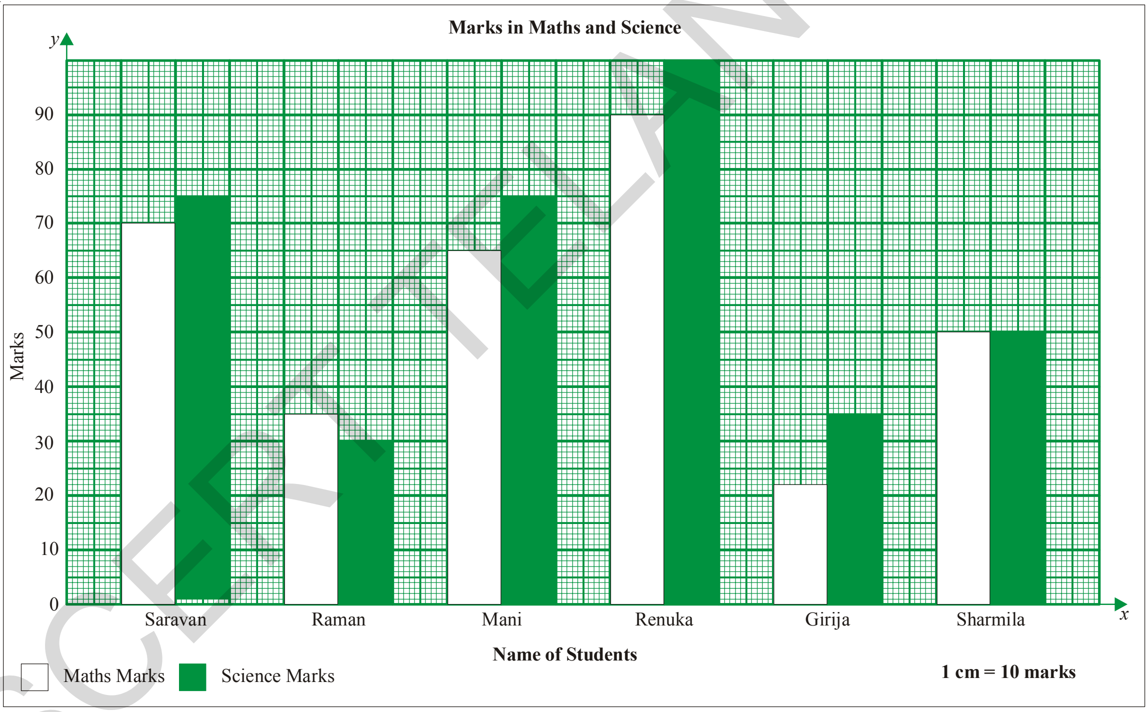
उदाहरण 13 : गुणांची यादी बघा व जी विज्ञान व गणिताचे 7 वीचे गुण दर्शविते यावरून जोड स्तंभालेख काढा.

विद्यार्थीचे नाव	गणित	विज्ञान
श्रावण	70	75
रमण	35	30
मनी	65	75
रेनूका	90	100
गिरीजा	22	35
शर्मीला	50	50

उत्तर : जोड स्तंभालेख पायऱ्या

1. आडव्या ओळीवर x अक्ष व उभ्या ओळीवर y अक्ष घेऊन छेदनबिंदूंला O. नाव द्या.
2. x अक्षावर विद्यार्थी घ्या.
3. y अक्षावर गणित विज्ञानाचे गुण घ्या.
4. आलेख कागदावर विषयाचे गुण y- अक्षावर 100 पर्यंत घेऊन 1 सेमी. = 10 चे प्रमाण घेऊन आलेख स्थापा.
5. आलेखावरील माहितीची उंची ही 10 ने पाहावी (एकक 1 cm = 10 गुण).
6. गणिताचे गुण आणि विज्ञानाचे गु.ण हे एकाबाजूस एक

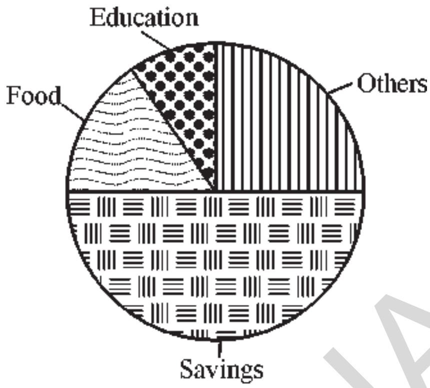
   असे आलेखाध्ये दाखवण्यात आले आहे.



7.6.3 वृत्तालेख

दुसऱ्या प्रकारच्या सामग्रीने आपण वर्तुळालेख दाखवू शकतो. डाव्याबाजूच्या तक्त्यात मासीक बजेट दिले आहे. तो वर्तुळालेखाने उजव्या बाजूला दाखविला आहे एकूण मिळकतीतून तो जास्तीत खर्च दाखविला आहे. जास्तीत मिळकत त्यात दाखविली आहे.

बजेट	रक्कम रू.
अन्न	1500
शिक्षण	750
इतर	2250
बचत	4500
एकूण उत्पन्न	9000



आकृतीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) आलेखाचा आकार कोणता आहे ?

(ii) या आलेखात दाखविलेल्या वेगवेगळया आकाराला काय म्हणतात

(iii) सत्य/असत्य सांगा (a) सर्वात मोठा भाग बचतीचा आहे.

(b) शिक्षणावर कमी खर्च होतो.

7.6.4 वर्तुळालेख काढणे

आता, वर्तुळालेख कसा काढावा हे शिकू या.

प्रत्येक बाब वर्तुळात दाखवावी लागते. आपणास माहीत आहे.

वर्तुळ केंद्रकाचे माप 360^0 असते. सर्व प्राप्तांक 9000 रू आहे. प्रत्येक खर्चांची बाब त्या एकूण मिळकतीवर अवलंबून असते.

$$\text{प्रत्येक कोन} \quad \frac{\text{खर्चाची रक्कम}}{\text{एकूण मिळकत}}$$

आम्ही हा कोनाच्या मापावरून तक्ता बनविला. तो दुस-या पानावर दाखविला आहे.

रचना :-

1. कोणत्याही त्रिज्येचे वर्तुळ काढुन केंद्राला ‘0’ नाव द्या.

2. वर्तुळावर A बिंदू स्थापून OA जोडा.

3. आता अन्नासाठी तशाच प्रकारे कोन काढा = 60^0 $\angle AOB = 60^\circ$ काढा.

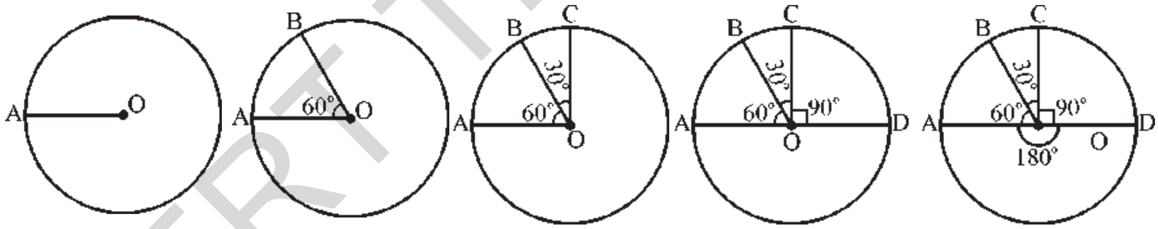
4. शिक्षणासाठी कोन = 30^0 $\angle BOC = 30^o$ काढा.

5. इतर = 90^0 चा कोन काढा. $\angle COD = 90^o$

6. आता $\angle DOA = 180^o$ बचती साठी काढा.

बजेट	खर्च रू.	खर्चाची टक्केवारी	क्षेत्रफळ
अन्न	1500	$\frac{1500}{9000} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360^o = 60^o$
शिक्षण	750	$\frac{750}{9000} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} \times 360^o = 30^o$
इतर	2250	$\frac{2250}{9000} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 360^o = 90^o$
बचत	4500	$\frac{4500}{9000} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 360^o = 180^o$

सूचना : प्रत्येक कोन 360^0 आहे का तपासून पाहा ?



स्वाध्याय- 4

1. दिलेल्या सामग्रीचा आलेख काढा.

वर्ष	1941	1951	1961	1971	1981	1991	2001
लोकसंख्या (कोटी))	320	360	440	550	680	850	1000

स्त्रोत:- भारतीय जनगणना 1991 व 2001

2. खालील माहितीवरून वर्तुळालेख काढा.

खर्चाचा प्रकार	अन्न	स्वाथ्य	कपडे	शिक्षण	बचत
खर्चाची रक्कम रू.	3750	1875	1875	1200	7500

3. जोडस्तंभालेख काढा.

विविध राज्यातील 1999 चे जन्म मृत्यूचे प्रमाण दर्शविले आहे.

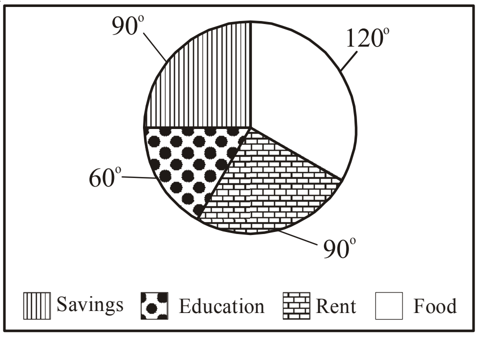
राज्य आन्ध्रप्रदेश	जन्मदर (प्रति 1000)	मृत्युदर (प्रति 1000)
आन्ध्रप्रदेश	22	8
कर्नाटक	22	8
तामिळनाडू	19	8
केरळ	18	6
महाराष्ट्र	21	8
ओरिसा	24	11

Source : The table is taken from vittal statistics SRS 1999.

4. खालील माहितीवरून वर्तुळालेख काढा.

बालकावरचा दिवसभरातील खर्च

वेळखर्च	झोप	शाळा	खेळ	इतर
वेळ खर्च	8 तास	6 तास	2 तास	8 तास



5. बाजूच्या वृत्तालेखा मध्ये खर्चदिले आहे. आणि कोनाच्या मापाने दर्शविले आहे. त्यावरून उत्तरे द्या.

(i) कमीत कमी खर्च कशासाठी होतो ?

(ii) जास्तीत जास्त खर्च कशावर होतो ?

(iii) जर समजा मासीक मिळकत रू. 9000 असेल तर भाडे किती ?

(iv) जर अन्नासाठी 3000 रू. खर्च होत असेल तर मुलांच्या शिक्षणासाठी किती खर्च होतो.

सरावासाठी

1) आपण राहतो त्या ठिकाणी (वार्ड/वसाहत/गाव) याची माहिती गोळा करा की कोणत्या प्रकारचे कुटूंब राहतात.

2) आपल्या कुटूंबाचे खर्च वृत्तालेखावर दाखवा.

3) विविध प्रकारच्या सामग्रीचे स्तंभालेख व वृत्तालेख दाखवा.

(शाळेचे मासीक, वृत्तपत्र, वर्तमानपत्र)

पाठ्यावलोकन

- मध्य,मध्यांक, मध्यमान हा दर्शनी मूल्यावर किंवा सामग्रीचा काढता येते.
- गणितीय मध्य समान असते. सर्व प्राप्तांकाचा बेरजेच्या सर्व प्राप्तांकाने येणाऱ्या भागाकाराशी गुणोत्तराच्या प्रमाणात असते.
- प्राप्तांकातील सर्वाधीक वारंवारत असलेल्या संख्येला मध्यांक म्हणतात. कधीकधी मध्यांक नसतो.
- मध्यमान हा प्राप्तांकांच्या मध्यंवर असतो, जेव्हा तो चढत्या उतरत्या क्रमाने लिहीलाजातो.
- वृत्तालेख हा वर्तुळाच्या आकाराचा असतो तो कोनात विभागला जातो.
- केंद्रीय कोन हा. दिलेल्या संख्येच्या प्रमाणाात असतो.

डॉ. सी.आर. राव (भारत)
इ.स. 1920 पूर्वी

थोर गणित शास्त्रज्ञ 1945 साली अंदाजित किंमतीसाठी (थिअरी ऑफ इस्टिमेशन) प्रसिद्ध आहेत.
क्रामर राव आणि फिशर राव यांच्या वरती कार्य केले.

त्रिकोणाची एकरूपता

8

8.0 प्रस्तावना

जर आपण एक रूपयांची नाण्यांची रास घेतली आणि ती एकावर एक अशी ठेवली तर ती पूर्णपणे एकमेकाशीं जुळतात. हे असे का घडते आपणास माहित आहे ? त्या नाण्यांची ठेवण आणि आकार समान असल्यामुळे हे घडते. अषाच प्रकारे कोऱ्या वहीच्या पानांची ठेवण आणि आकार समान असते.

तुमच्या सभोवती बघा आणि अशा प्रकारची समानता असणाऱ्या वस्तूंची काही उदाहरणे शोधा ज्यामध्ये त्यांची ठेवण आणि आकार तंतोतंत जुळणारा असेल. अशा प्रकारच्या कमीत कमी पाच उदाहरणांचा विचार करा.

जेव्हा आपण समान ठेवण आणि आकार असलेल्या एखाद्या वस्तूविषयी बोलतो तेव्हा आपण म्हणतो की त्या वस्तू एकरूप आहेत. आणि एकरूपतेची प्रात्यक्षिक कसोटी ही एक वस्तू दुसऱ्या वस्तूवर ठेवले तर त्या एकमेकींवर अचूकपणे बसत असतील हे बघणे होय.

कृती :

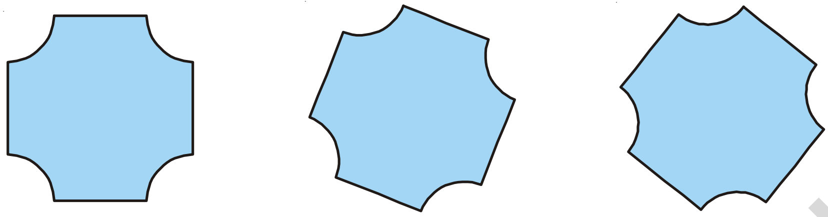
10 रूपयांच्या सर्व नोटा एकरूप आहेत काय ? तुम्ही कसे तपासाल ?

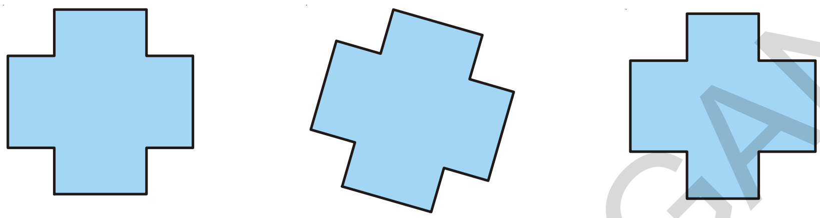
तसेच तुम्हाला आढळलेल्या पाच रूपयांच्या नोटा एकरूप आहेत का ते तपासा.

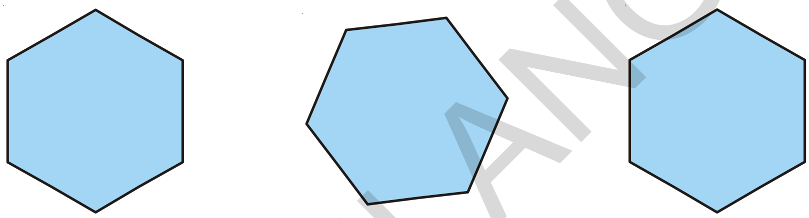
आपल्या सभोवती एकरूप वस्तूंची अनेक उदाहरणे आपण पाहतो आता काही एकरूप आकारांचा विचार करू.

सरावासाठी

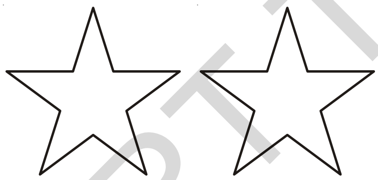
1. येथे काही आकार दिलेले आहेत. एका ओळीत दिलेले सर्व आकार एकमेकांशी एकरूप आहेत किंवा नाही ते बघा. तुम्ही आकृत्या (ट्रेस) रेखाटू शकता आणि तपासा.

(i) 

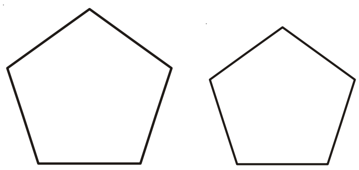
(ii) 

(iii) 

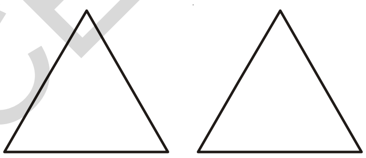
2. खालील आकृत्यांच्या जोड्यापैकी कोणत्या एकरूप आहेत ?



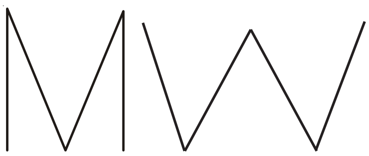
(i)



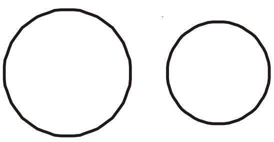
(ii)



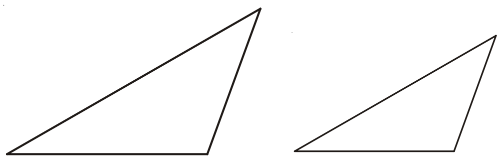
(iii)



(iv)



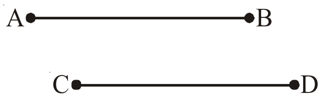
(v)



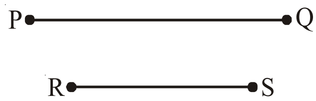
(vi)

8.1 रेषाखंडाची एकरूपता

खाली दिलेल्या दोन रेषाखंडाचे निरीक्षण करा.



आकृती 1



आकृती 2

ट्रेसिंग पेपरवर AB ची नक्कल काढा ती रेषाखंड CD वर ठेवा तुम्हाला असे आढळून येईल की रेषाखंड AB रेषाखंड CD ला पूर्ण पणे झाकतो म्हणून हे रेषाखंड एकरूप आहेत आपण ते $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ असे लिहीतो.

हीच कृती आकृती दोन मधील रेषाखंडासाठी पुन्हा करा. तुम्हाला काय आढळले ? काय ते एकरूप आहेत.

आकृती 1 मधील रेषाखंडाची जोडी एकमेकांशी जुळते कारण त्यांची लांबी समान आहे आणि आकृती 2 मध्ये मात्र तसे नाही हे तुमच्या लक्षात येईल.

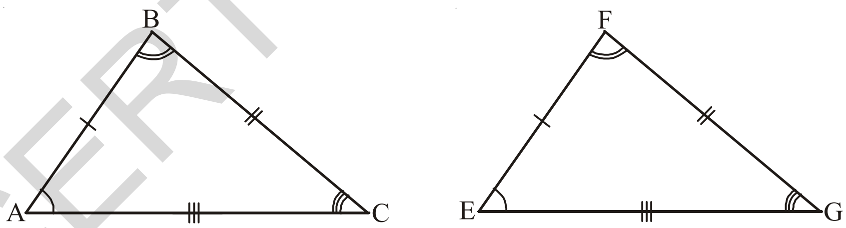
रेषाखंडाला फक्त एक मिती असते ती म्हणजे लांबी म्हणून जर दोन रेषाखंडाची लांबी समान असेल तर ते रेषाखंड एकरूप असतात याच्या उलट, जर दोन रेषाखंड एकरूप असतील तर त्यांची लांबी समान असते.

जेव्हा आपण $AB = CD$ असे लिहीतो तेव्हा आपल्याला $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ असे म्हणायचे असते.

8.2 त्रिकोणाची एकरूपता

एक रेषा दुसऱ्या रेषेची कॉपी असते तेव्हा ते दोन रेषाखंड एकरूप असतात ते आपण शिकलो. ही युक्ती आपण त्रिकोणासाठी वापरू. जर दोन त्रिकोण एकमेकांसारखेच असतील आणि एकमेकांवर ठेवले असता तंतोतंत जुळत असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे आपण म्हणतो.

ΔABC आणि ΔEFG दोन्ही त्रिकोण एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात म्हणजेच त्यांची मापे आणि आकार समान आहेत. ते एकरूप त्रिकोण आहेत. दोन त्रिकोणांची एकरूपता आपण त्रिकोण $\Delta ABC \cong \Delta EFG$ अशी दाखवतो.



जर दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर त्यांचे सर्व सहा घटक म्हणजेच तीन कोन आणि तीन बाजू एकरूप असतात

दोन त्रिकोणांचे संगत घटक परस्परांशी एकरूप असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे सुद्धा आपण म्हणू शकतो.

याचाच अर्थ, ΔABC हा ΔEFG वर ठेवला असता त्यांच्या संगत कडा एकमेकांवर बसतात.

E बिंदुवर A, F बिंदुवर B आणि G. बिंदुवर C

तसेच $\angle A$ हा $\angle E$ वर $\angle B$ हा $\angle F$ वर, $\angle C$ हा $\angle G$ वर आणि शेवटी $\angle AB$ हा $\angle EF$ वर, $\angle BC$ हा $\angle FG$ वर आणि $\angle AC$ हा $\angle EG$ शी जुळतो.

अशाप्रकारे, दोन एकरूप त्रिकोणांचे संगत घटक जसे शिरोबिंदू, कोन आणि बाजू एकमेकांशी जुळतात किंवा समान असतात.

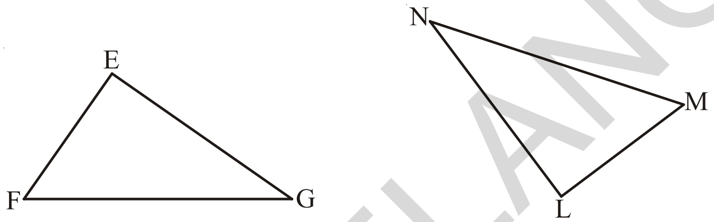
ΔABC आणि ΔEFG मध्ये

$A \rightarrow E$	$B \rightarrow F$	$C \rightarrow G$	(संगत शिरोबिंदू)
$\angle A \cong \angle E$	$\angle B \cong \angle F$	$\angle C \cong \angle G$	(संगत कोन)
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$	$\overline{BC} \cong \overline{FG}$	$\overline{AC} \cong \overline{EG}$	(संगत बाजू)

ज्या आधी जेव्हा $\Delta ABC \cong \Delta EFG$ असे आपण म्हणतो.एकरूप त्रिकोणाच्या नावातील मूळाक्षरांचा क्रम हा आपणास त्यांच्यातील संगती दाखवितो.

सरावासाठी

1. $\Delta EFG \cong \Delta LMN$

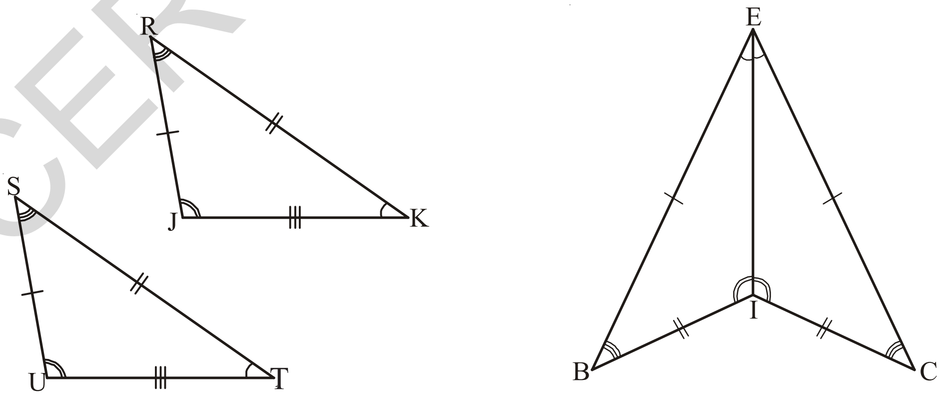


दोन्ही त्रिकोणाचे संगत शिरोबिंदू, कोन आणि भुजा लिहा.

2. जर $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ असेल तर असेल तर ΔABC चे संगत घटक लिहा.

(i) DE (ii) $\angle E$ (iii) DF (iv) EF (v) $\angle F$ शी संगत घटक लिहा.

3. खालील कोणत्या जोडीतील त्रिकोण एकरूप आहेत त्याची नावे लिहा तुमचे विधान ' $\cong$' वापरून .



4 . खालील एकरूप त्रिकोणांच्या जोड्यातील एकरूप कोन आणि बाजूंची नावे लिहा.

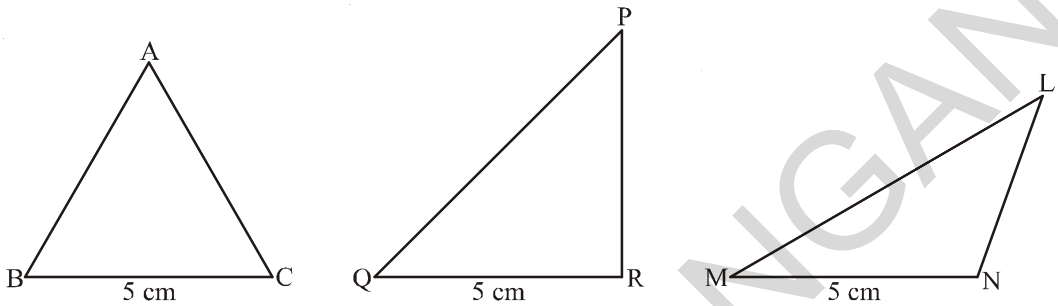
1. $\Delta TUV \cong \Delta XYZ$ 2. $\Delta CDG \cong \Delta RSW$

8.3 त्रिकोणांच्या एकरूपतेची कसोटी

त्रिकोणांची एकरूपता त्या दोन त्रिकोणाचे सर्व संगत घटक एकरूप आहेत हे पाहणे आवश्यक आहे काय ? दिलेले त्रिकोण हे एकरूप आहेत हे कमीत कमी मापनाच्या आधारे आपण कसे तपासणार ? चला तर आपण अभ्यास करू या. आणि शोधून काढू.

8.3.1 बाजू - बाजू - बाजू एकरूपता (बाबाबा)

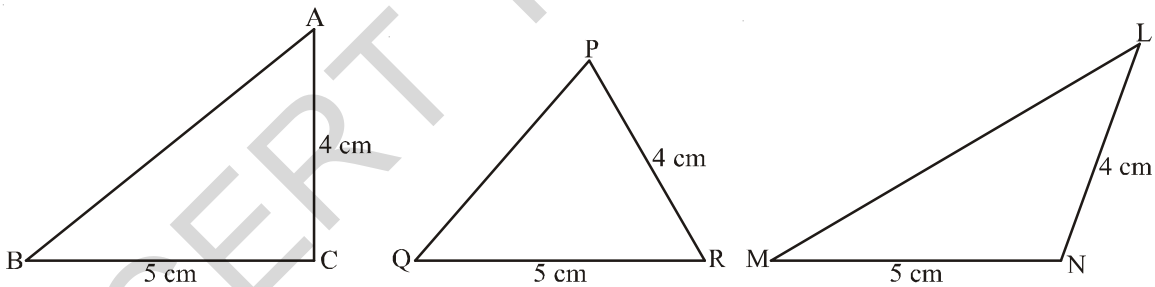
जर तुम्हाला त्रिकोणाची एका बाजूचे माप 5 सेमी माहित आहे तर तुम्ही सर्वजण सारखेच त्रिकोण काढाल काय ? कमल नम्रीता आणि सूसानने ते त्रिकोण खालीलप्रमाणे काढले.



कमल नम्रीता सूसान

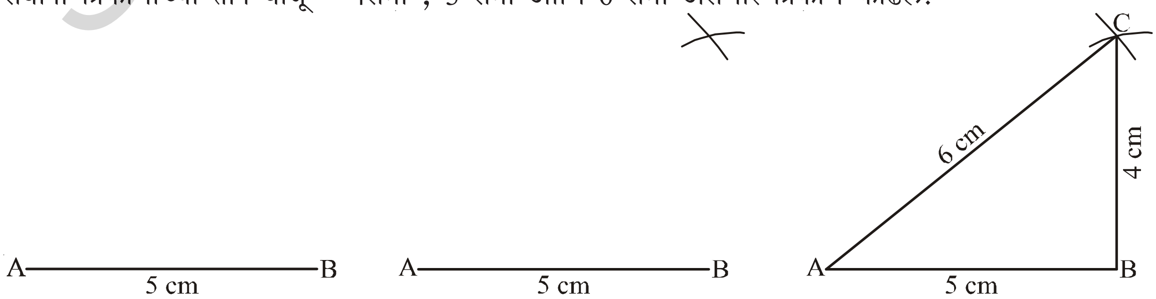
तुम्ही बघू शकता की, सर्व त्रिकोण वेगवेगळे आहेत कमलने समभूज त्रिकोण, नम्रिताने काटकोन त्रिकोण आणि सुसानने विषालकोन त्रिकोण काढला.

आता तुम्हाला त्रिकोणाच्या फक्त दोन बाजू ची मापे 4 सेमी आणि 5 सेमी माहित आहेत तर तुम्ही सारखेच त्रिकोण काढू शकाल काय ? पुन्हा कमल , नम्रिता आणि सुसानने वेगवेगळे त्रिकोण काढले.



कमल नम्रीता सूसान

जर तुम्हाला त्रिकोणाच्या सर्व बाजूंची मापे माहित असतील तर काय होईल ? कमल , नम्रिता आणि सुसान या सर्वांनी त्रिकोणाच्या तीन बाजू - 4सेमी , 5 सेमी आणि 6 सेमी असणारे त्रिकोण काढले.



अशाप्रकारे जर तुम्हाला ABC ची कॉपी हवी असेल किंवा ABC चा एकरूप त्रिकोण हवा असेल तर आपल्याला तील बाजूंची लांबीची गरज आहे.

यालाच आपण त्रिकोणाच्या एकरूपतेची बाजू-बाजू-बाजू (बा-बा-बा) कसोटी म्हणतो.

जर दोन त्रिकोण एकरूप असतील तर त्यांच्या संगत बाजूंची लांबी समान असेल तेव्हा त्यांचे कोनसुध्दा एकरूप असतील काय ?

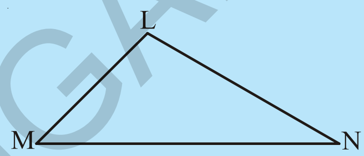
त्रिकोणांच्या एकरूपतेची बाजू-बाजू-बाजू ला (बा-बा-बा) कसोटी

जर त्रिकोणाच्या तीन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत बाजूंची समान असतील तर ते त्रिकोण एकरूप आहेत.

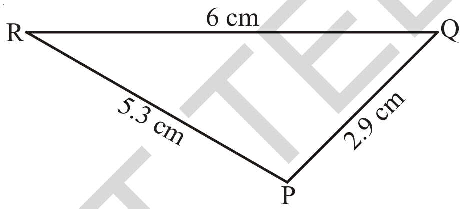
सरावासाठी

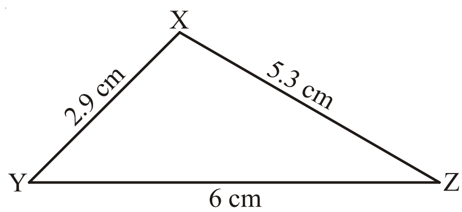
ΔLMN ची लांबी मोजा. आता पेपर शीटवर याच मापाचा एक त्रिकोण तयार करा ΔLMN वर हा त्रिकोण ठेवा.

ते त्रिकोण एकरूप आहेत काय? येथे आपण एकरूपतेच्या कोणत्या कसोटीचा वापर केला ?



उदाहरण 1 : $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ आहे काय? तसेच दोन त्रिकोणांचे संगत कोन लिहा.





उत्तर : ΔPQR आणि ΔXYZ मध्ये दिलेल्या आकृतीप्रमाणे आपल्याला

PQ = XY = 2.9 सेमी

QR = YZ = 6 सेमी

RP = ZX = 5.3 सेमी

अशाप्रकारे त्रिकोणाच्या बाजू-बाजू-बाजू या एकरूपतेच्या कसोटीनुसार $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

स्पष्टपणे बिंदू P हा बिंदू X शी संगत आहे.

बिंदू Q हा बिंदू Y शी संगत आहे. आणि

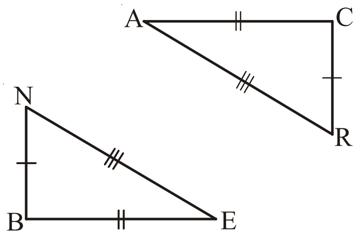
बिंदू R हा बिंदू Z शी संगत आहे.

म्हणून $\angle P, \angle X$; $\angle Q, \angle Y$; $\angle R, \angle Z$ हे संगत कोन शोधा.

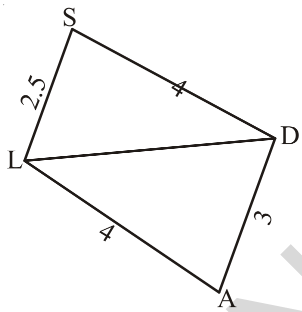
स्वाध्याय - 1

1. खालील आकृत्यांशी बा बा बा एकरूपता खरी आहे का ते ठरवा. कारणे द्या.

(i)

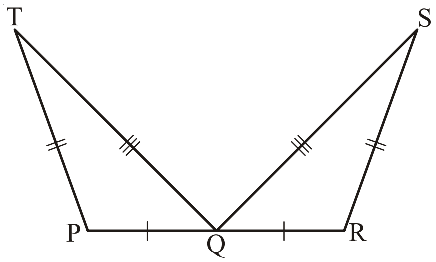


(ii)

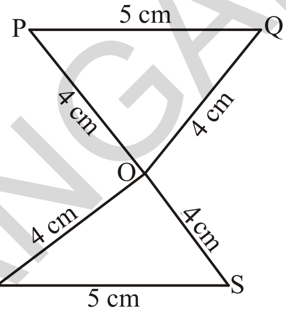


2. खालील एकरूप त्रिकोणासाठी संगत कोनाच्या जोड्या शोधा.

(i)



(ii)



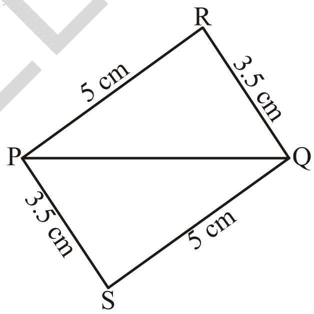
3. पुढील संलग्न आकृतीत योग्य उत्तर निवडा.

(i) $\Delta PQR \cong \Delta PQS$

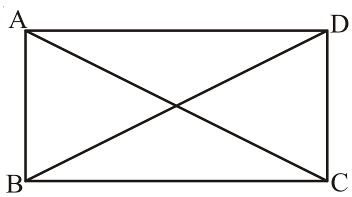
(ii) $\Delta PQR \cong \Delta QPS$

(iii) $\Delta PQR \cong \Delta SQP$

(iv) $\Delta PQR \cong \Delta SPQ$



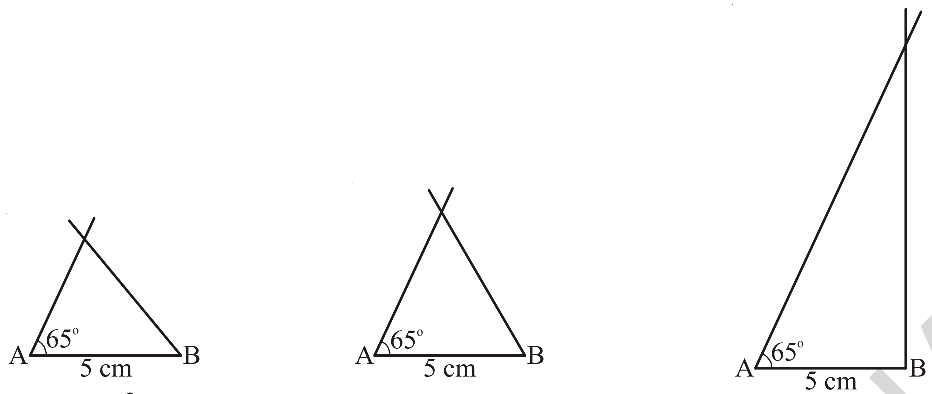
4. खाली दिलेल्या आकृतीमध्ये $AB = DC$ आणि $AC = DB$ तर $\Delta ABC \cong \Delta DCB$.आहे का ?



8.3.2 बाजू कोन बाजू एकरूपता

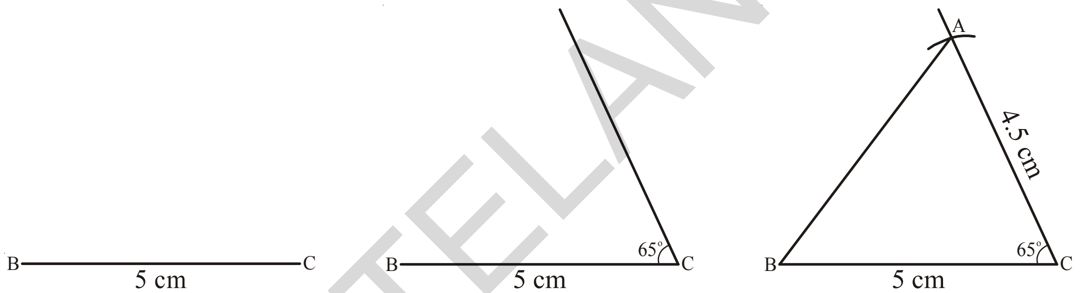
जर आपल्याला त्रिकोणाच्या एकाच बाजूचे माप दिले तर आपण दोन एकरूप त्रिकोण काढणे शक्य नाही हे आपण बघितलेले आहे. आता आपणास एक कोन आणि एक बाजू दिली तर ? कमल नम्रिता आणि सुसानला त्रिकोणाची एक बाजू 5 सेमी एक कोन 65^0 असलेला त्रिकोण काढायला सांगितले.

त्यांनी खालील भिन्न त्रिकोण काढले.



कमल नम्रीता सूसान

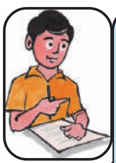
आता जर त्या तिघींना त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्या बाजूमध्ये समाविष्ट कोन माहित झाला तर त्या तीन मुलींनी 5 सेमी बाजू आणि 4.5 सेमी बाजू व त्या बाजूमध्ये समाविष्ट कोन 65^0 असलेले त्रिकोण काढायचे ठरविले. कमल ने ΔABC काढला तिने BC = 5 सेमीचा पाया काढला नंतर तिने कोनमापकाने $\angle C = 65^o$ काढला आणि नंतर कोन असलेल्या रेषेवर 4.5 सेंमी लांबी असलेला बिंदू A रेखाटला. नंतर तीने A आणि B जोडून घेतले.



बिंदू B वर बाजू AB = 4.5 सेमी असेल तर 65^0 कोन तुम्ही काढू शकता काय? तयार झालेला त्रिकोन कमलने काढलेल्या त्रिकोणाशी एकरूप असेल काय ? या ठिकाणी तयार झालेले त्रिकोण हे एकरूप त्रिकोण आहेत हे तुमच्या लक्षात येईल.

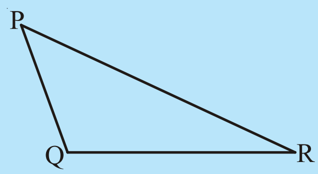
जर आपणास ΔABC ची कॉपी हवी असेल किंवा ΔABC एकरूप त्रिकोण हवा असेल तर आपणास दोन बाजूची लांबी आणि त्या बाजूमध्ये समाविष्ट कोनांची मापे यांची आवश्यकता आहे. यालाच आपण त्रिकोणाच्या एकरूपतेची बाजू कोन बाजू (बा को बा) कसोटी म्हणतो.

त्रिकोणाच्या एकरूपतेची बाजू कोन बाजू (बा को बा) कसोटी : जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्या बाजूमध्ये समाविष्ट कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत बाजू आणि त्या बाजूमध्ये समाविष्ट कोन यांच्याशी एकरूप असतील तर हे त्रिकोण एकरूप आहेत असे म्हणतात.

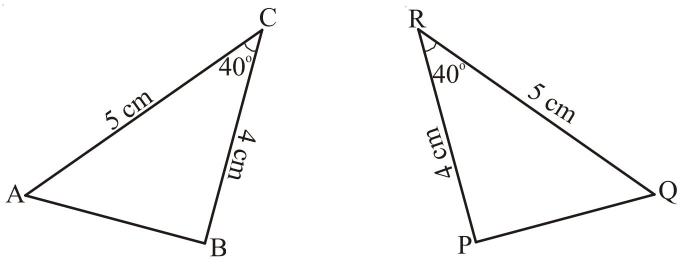


सरावासाठी

ΔPQR मधील बाजू PQ बाजू QR ची लांबी मोजा तसेच $\angle Q$ मोजा. आता या तीन मापाच्या सहाय्याने पेपर शिटवर एक त्रिकोण काढा हा त्रिकोण ΔPQRवर ठेवा. काय ते त्रिकोण एकरूप आहेत ? येथे एकरूपतेच्या कोणत्या कसोटीचा वापर केला ?



उदाहरण 2 : खाली दिलेल्या त्रिकोणांची मापे बघा ते त्रिकोण एकरूप आहेत काय ? संगत शिरोबिंदू आणि कोन कोणते ?



उत्तर : ΔABC आणि ΔPQR $AC = QR$ आणि $BC = PR$

आणि समाविष्ट $\angle C \cong \angle R$

ΔABC आणि ΔPQR मध्ये $AC = QR$ आणि $BC = PR$ त्यातील कोन $\angle C \cong \angle R$

म्हणून, $\Delta ABC \cong \Delta QPR$

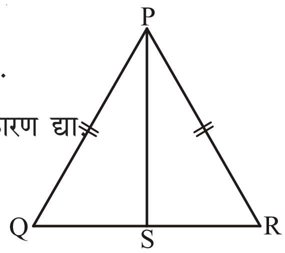
संगती खालील प्रमाणे आहेत :

$A \leftrightarrow Q$, $B \leftrightarrow P$ आणि $C \leftrightarrow R$

म्हणून $\angle A \cong \angle Q$, $\angle B \cong \angle P$आणि $\angle C \cong \angle R$

उदाहरण 3 : ΔPQR, मध्ये $PQ = PR$ आणि PS हा $\angle P$ चा दुभाजक आहे.

ΔPQS आणि ΔPRS हे एकरूप आहेत काय ? असल्यास कारण द्या.



उत्तर : ΔPQS आणि ΔPRS मध्ये

$PQ = PR$ (दिलेला)

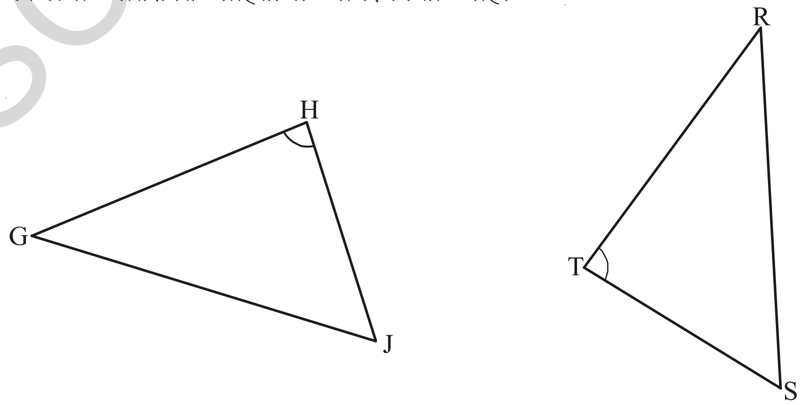
$PS = PS$ (दोन्ही त्रिकोणात समान बाजू)

आणि समाविष्ट कोन $\angle QPS \cong \angle RPS$ (PS हा कोन दुभाजक आहे)

म्हणून, $\Delta PQS \cong \Delta PRS$ (बा को बा कसोटी नुसार)

स्वाध्याय - 2

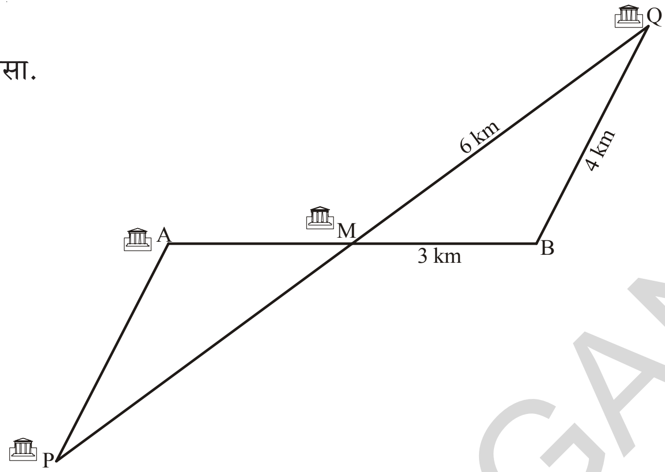
1. खाली दिलेले दोन त्रिकोण बा को बा कसोटीनुसार एकरूप आहेत हा निष्कर्ष काढण्यासाठी तुम्हाला कोणत्या अतिरीक्त माहितीची आवश्यकता आहे.



2. खाली दिलेला नकाशा वेगवेगळी पाच खेडी दर्शीवितो.

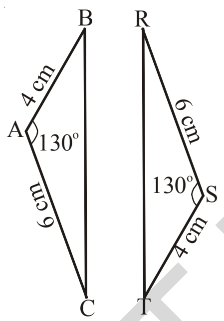
खेडे A आणि B तसेच खेडे P आणि Q या दोन खेडयांच्या जोड्यांमध्ये खेडे M येथे अगदी मधोमध आहे. तर खेडे A आणि खेडे P यातील अंतर किती ?

$\Delta PAM \cong \Delta QBM$ हे तपासा.

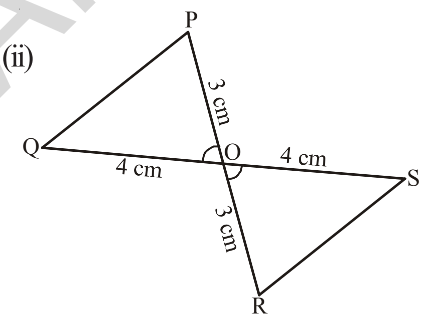


3. खाली दिलेल्या त्रिकोणांच्या जोड्यांकडे बघा. काय त्या एकरूप आहेत ? जर एकरूप असतील तर त्याचे संगत घटक लिहा.

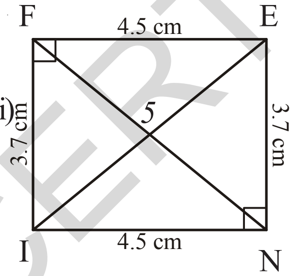
(i)



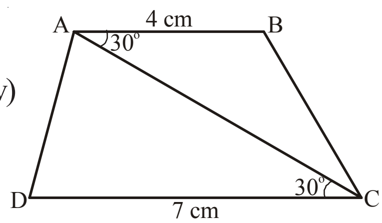
(ii)



(iii)

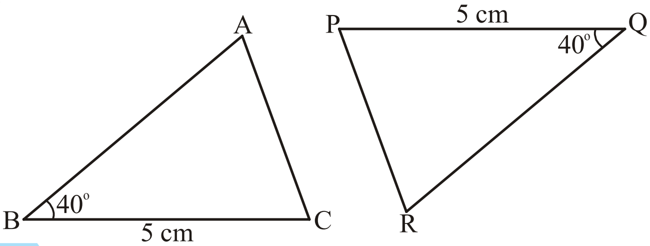


(iv)

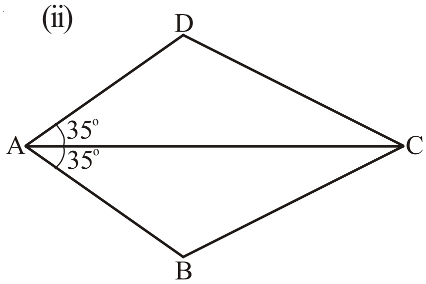


4. खालील त्रिकोण बा को बा कसोटीनुसार एकरूप आहेत हे सिद्ध करण्यासाठी कोणत्या संगत बाजू आपल्याला माहीत असणे गरजेचे आहे ?

(i)

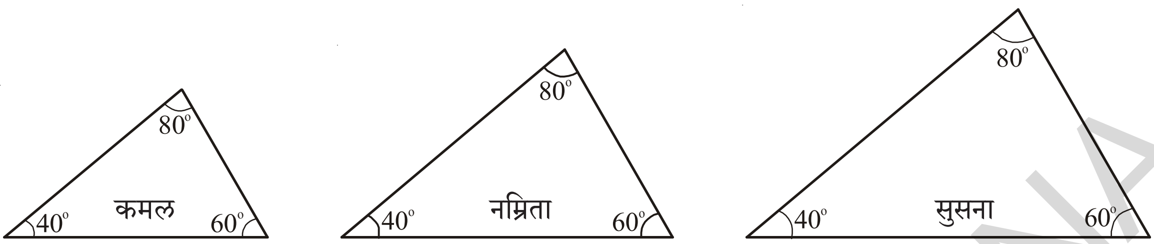


(ii)



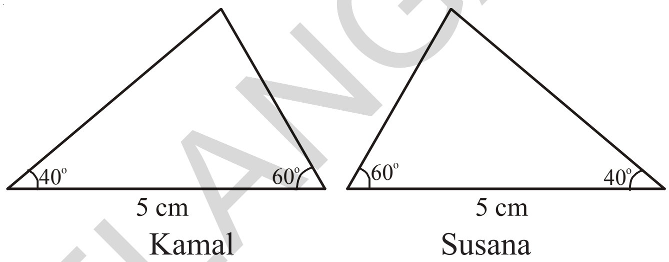
8.3.3 कोन बाजू कोन एकरूपता (को-बा-को)

जर मुलांना त्रिकोणाचा एकच कोन माहित असेल तर ते त्रिकोण काढू शकतील काय ? जर त्यांना दोन कोन माहित असतील तेव्हा काय? जर मुलांना त्रिकोणाचे सर्व कोन माहित असेल तर एकरूप त्रिकोण काढू शकतील काय? कमल, नम्रिता आणि सुसानने त्रिकोणाचे कोन 40^0 , 60^0 आणि 80^0 असलेले खालील त्रिकोण काढले.



म्हणून जरी त्रिकोणाच्या सर्व कोन एकरूप आहेत परंतु त्याच्या बाजूची लांबी एकरूप नाहीत म्हणून ते एकरूप त्रिकोण नाहीत.

अशा प्रकारे , एकरूप त्रिकोण काढण्यासाठी आपल्याला बाजूची लांबी माहीत असणे गरजेचे आहे जर आपल्याला दोन कोन आणि एक बाजू दिली तर ? कमल आणि नम्रिता ने 60^0, 40^0 कोन असलेले आणि 5 सेमी असलेले त्रिकोण काढले.



जेव्हा दोन्ही मुलींनी त्यांचे त्रिकोण काढले तेव्हा त्यांनी दिलेली बाजू ही दोन कोनांनी समाविष्ट बाजू घेतली.

आपण निष्कर्ष काढू शकतो की, जर आपल्याला एखाद्या त्रिकोणाची कॉपी करायची असेल किंवा एखाद्या त्रिकोणाला दुसरा एखादा एकरूप त्रिकोण काढायचा असेल तर आपल्याला त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्या दोन कोनांमध्ये समाविष्ट बाजूची लांबी असणे गरजेचे आहे यालाच एकरूपतेची कोन बाजू कोन कसोटी असे म्हणतात.

एकरूपतेची कोन बाजू कोन कसोटी : जर त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्यांच्या मध्ये समाविष्ट बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन आणि त्यांच्यामध्ये समाविष्ट बाजू यांच्याशी एकरूप असतील तर ते त्रिकोण एकरूप आहेत.

सरावासाठी

शिक्षकांनी कोन 60^0 , 40^0 आणि बाजू 5 सेमी असलेला त्रिकोण मुलींना काढायला सांगितला. त्रिकोणाच्या कोनाच्या बेरजेचा गुणधर्म उपयोगात आणुन सुषमाने त्रिकोणाचा तिसरा कोन 80^0 असा मोजला. नंतर कमल आणि सुष्मा आणि नम्रताने खालील मापांच्या सहाय्याने वेगवेगळे त्रिकोण काढले.

कमल : 60, 40 आणि बाजू 5 सेमी (शिक्षकांनी सांगितल्यानुसार)

सुषमा : 80 40 आणि बाजू 5 सेमी

नम्रिता : 60 , 80 आणि बाजू 5 सेमी

त्यांनी ते त्रिकोण कापून घेतले आणि एकमेकांवर ठेवले ते सर्व एकरूप आहेत का? तुम्ही सुद्धा असा प्रयत्न करा.

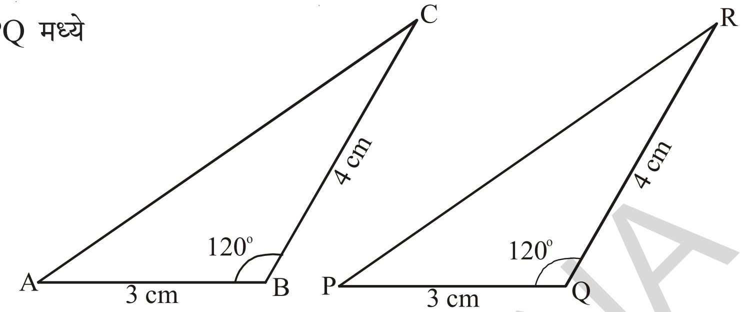
उदाहरण 4 : खाली ΔCAB आणि ΔRPQ दिलेले आहे ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत का ते तपासा जर ते एकरूप असतील तर त्रिकोणाच्या उर्वरीत घटकांच्या मापाविषयी तुम्ही काय सांगू शकता ?

उत्तर : ΔCAB आणि ΔRPQ मध्ये

$BC = QR = 4$ cm

$\angle B = \angle Q = 120°$

$AB = PQ = 3$ cm



अशा प्रकारे ΔCAB च्या दोन बाजू आणि त्यांच्यामध्ये समाविष्ट कोन हे ΔRQP च्या दोन संगत बाजू आणि त्यांच्या समाविष्ट कोन यांच्याएवढ्याच आहेत.

म्हणून $\Delta CAB \cong \Delta RPQ$ (बाजू कोन बाजू कसोटीनुसार)

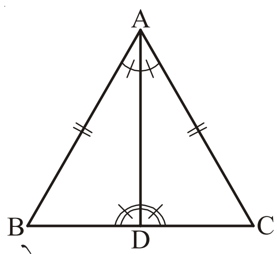
ज्या अर्थी या दोन त्रिकोणात

$AC \cong PR$

$\angle C \cong \angle R$ and $\angle A \cong \angle P$

उदाहरण 5 : खालील आकृतीमध्ये दोन त्रिकोणांचे समान कोन दाखविले आहे ? ते त्रिकोण एकरूप आाहेत काय ?

उत्तर : ΔABD आणि ΔACD मध्ये



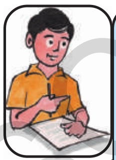
$\angle BAD \cong \angle CAD$ (प्रश्नामध्ये दिलेल्या नुसार)

$\angle ADB \cong \angle ADC$ (प्रश्नामध्ये दिलेल्या नुसार)

$AD \cong AD$ (समान बाजू आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे)

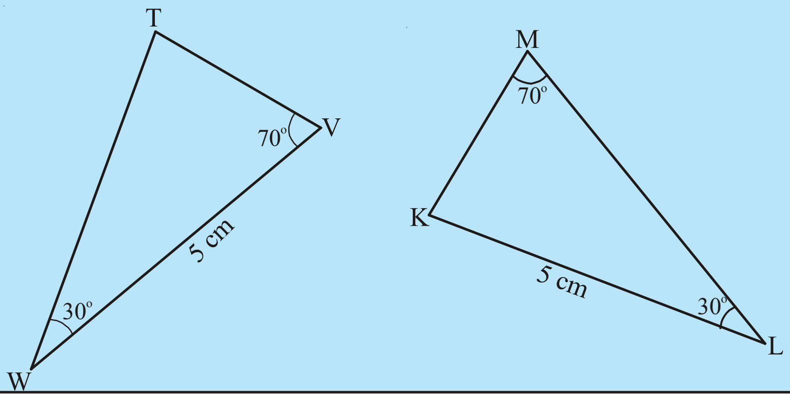
अशा प्रकार $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ एकरूपतेच्या कोन बाजू कोन कसोटीनुसार एकरूप आहेत.

खालील त्रिकोणांची जोडी एकरूप आहे काय ? तुमच्या उत्तराच्या समर्थनार्थ कारणे द्या.



सरावासाठी

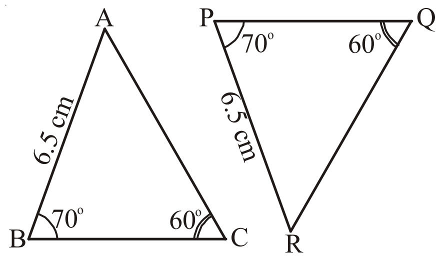
खालील त्रिकोणांची जोडी एकरूप आहे काय ? तुमच्या उत्तराच्या समर्थनार्थ कारणे द्या.



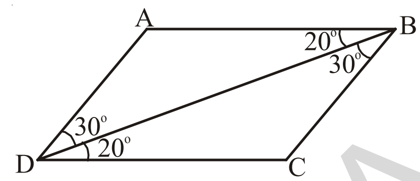
स्वाध्याय - 3

1. खालील त्रिकोणांच्या जोड्यांमध्ये एकरूप त्रिकोणाच्या जोडया शोधा. तसेच एकरूपतेची कसोटी लिहा.

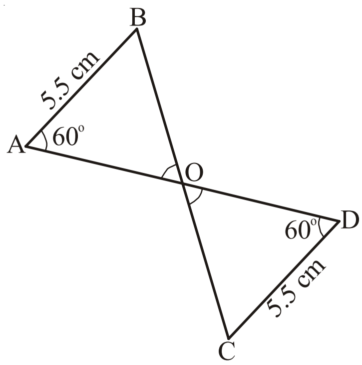
(i)



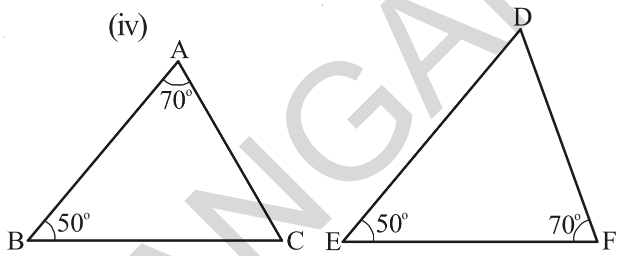
(ii)



(iii)



(iv)

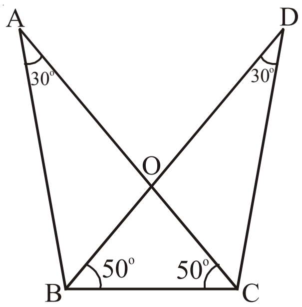


2. शेजारच्या आकृतीमध्ये

(i) ΔABC आणि ΔDCB एकरूप आहेत काय ?

(ii) ΔAOB हा ΔDOC शी एकरूप आहे का?

तसेच संगत घटकांतील संबंध ओळख आणि तुमच्या उत्तराच्या समर्थनार्थ कारण द्या.



8.3.4 काटकोन त्रिकोणात कर्ण भूजा एकरूपता

काटकोन त्रिकोणात एक कोन काटकोन असतो हे आपल्याला अगोदरच माहित आहे तेव्हा दोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे सिद्ध करण्यासाठी आपल्याला दुसऱ्या कोणत्या गोष्टींची गरज आहे ?
चला तर आपण ΔABC चे उदाहरण घेवू ज्यामध्ये $\angle B = 90$. या त्रिकोणात एकरूप त्रिकोण आपण काढू शकतो का, जर

(i) फक्त BC चे माप माहित आहे.

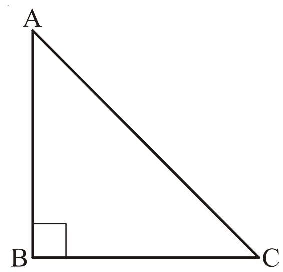
(ii) फक्त $\angle C$ माहित आहेत.

(iii) $\angle A$ आणि $\angle C$ माहित आहेत.

(iv) AB आणि BC माहित आहेत.

(v) $\angle C$ आणि BC माहित आहेत.

(vi) BC आणि कर्ण AC माहित आहे.



जेव्हा तुम्ही या त्रिकोणांचे कच्चे आराखडे काढायचा प्रयत्न कराल तेव्हा तुमच्या लक्षात येईल की बा (iv), (v) आणि (vi) मध्येच हे शक्य आहे.

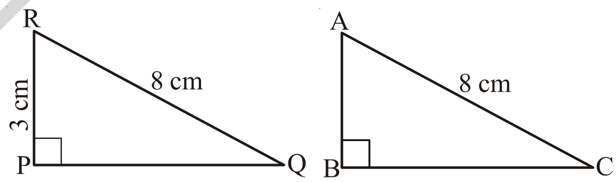
शेवटची बाब ही आपल्यासाठी नवीन आहे आणि तिलाच काटकोन त्रिकोणाचे कर्ण भूजा प्रमेय असे म्हणतात.

कर्ण भुजा प्रमेय :- जर एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक बाजू दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील तर ते दोन काटकोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

उदाहरण 6 : दोन त्रिकोणांच्या काही भागांची (घटकांची) मापे खाली दिली आहेत कर्ण भुजा प्रमेयाचा वापर करून ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत किंवा नाही हे तपासा. जर ते त्रिकोण एकरूप असतील तर चिन्हाने दाखवा.

	ΔABC	ΔPQR
(i)	$\angle B = 90^o$, $AC = 8$ सेमी, $AB = 3$ सेमी	$\angle P = 90^o$, $PR = 3$ सेमी, $QR = 8$ सेमी
(ii)	$\angle A = 90^o$, $AC = 5$ सेमी, $BC = 9$ सेमी	$\angle Q = 90^o$, $PR = 8$ सेमी, $PQ = 5$ सेमी

उत्तर :

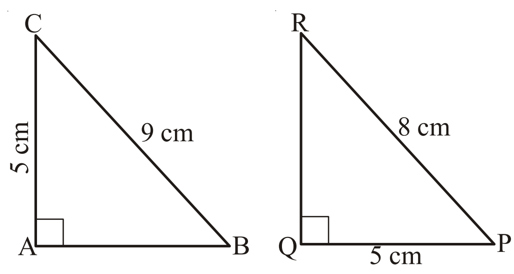


(i) येथे $\angle B = \angle P = 90^o$

कर्ण AC कर्ण RQ (8 सेमी)

आणि बाजू $AB =$ बाजू RP (3सेमी)

म्हणून $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$(कर्णभुजा प्रमेयानुसार)



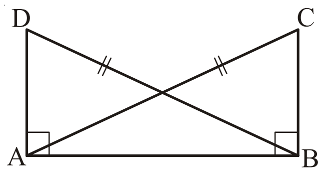
(ii) येथे $\angle A = \angle Q = 90^o$ आणि

बाजू $AC =$ बाजू PQ (5 सेमी).

कर्ण, $BC \neq$ कर्ण, PR

म्हणून हे त्रिकोण एकरूप नाहीत.

उदाहरण 7 : शेजारील आकृतीमध्ये, $\overline{DA} \perp \overline{AB}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ आणि $AC = BD$.



ΔABC आणि ΔDAB मधील तीन एकरूप घटकांच्या जोड्या लिहा.

खालीलपैकी कोणती विधाने अर्थपूर्ण विधाने अर्थपूर्ण (सार्थ) आहेत ?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

उत्तर : एकरूप घटकांच्या तीन जोडया पुढीलप्रमाणे आहेत.

$\angle ABC = \angle BAD \ (= 90^\circ)$

$AC = BD$ (दिलेल्यानुसार)

$AB = BA$ (समान बाजू)

$\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (कर्ण भूजा (प्रमेय) कसोटीनुसार)

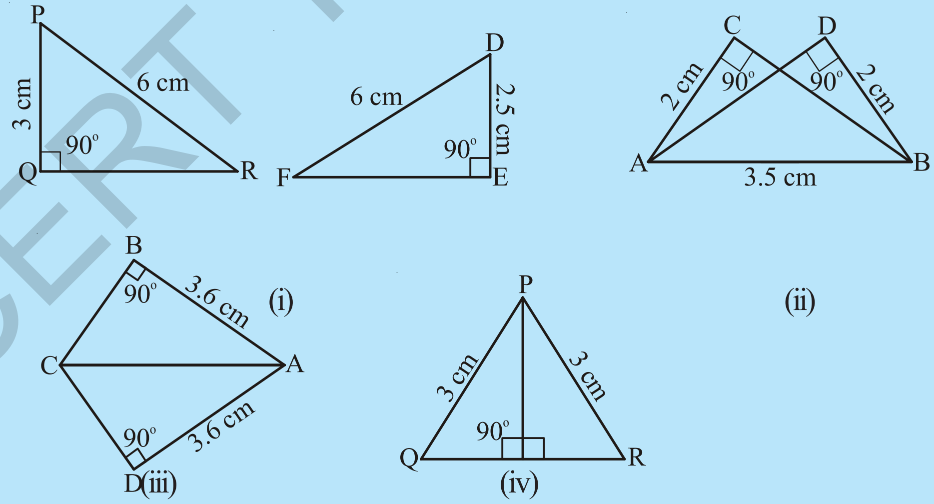
वरील माहितीवरून.

विधान (i) सत्य आहेय

विधाने (ii) हे अर्थपूर्ण नाही कारण शिरोलंबातील घटक संगत नाहीत.

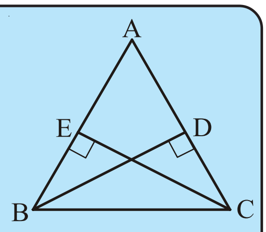
सरावासाठी

1. खाली दिलेल्या आकृत्यांमध्ये त्रिकोणाच्या काही भागाची मापे दिली आहेत कर्ण -भुजा प्रमेयाचा वापर करून त्रिकोणाच्या कोणत्या जोडया एकरूप आहेत ते नमुद करा. एकरूप त्रिकोणाच्या बाबतीत ते चिन्हाने RHS दाखवा.



एकरूपतेच्या कर्ण भुजा प्रमेयानुसार हे निर्विवादपणे सिद्ध झाले आहे की $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ जर आणि $\angle B = \angle P = 90^\circ$ आणि $AB = RP$? हे दिलेले असेल तर आणखी कोणती माहिती आवश्यक आहे ?

3. शेजारील आकृतीमध्ये $\overline{BD}$ आणि $\overline{CE}$ हे ΔABC चे शिरोलंब आहेत. $BD = CE$

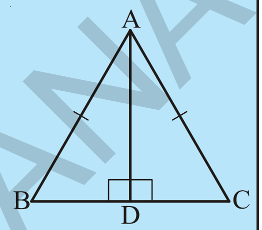


(i) ΔCBD आणि ΔBCE मधील 3 एकरूप घटकांच्या जोड्या लिहा.

(ii) $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ आहेत काय ? असल्यास का किंवा नसल्यास का नाही ?

(iii) $\angle DBC = \angle EBC$ आहेत काय ? असल्यास का किंवा नसल्यास का नाही ?

4. ABC हा समद्विभुज त्रिकोण असून $\overline{AB} = \overline{AC}$ आणि $\overline{AD}$ हा शिरोलंब आहे. (आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे)



(i) ΔADB आणि ΔADC मधील तीन एकरूप घटकांच्या जोड्या लिहा.

(ii) $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ आहेत काय ?

(iii) $\angle B \cong \angle C$ आहेत काय ? असल्यास का किंवा नसल्यास का नाही.

(iv) $BD \cong CD$ आहे काय ? असल्यास का किंवा नसल्यास का नाही. ?

स्वाध्याय - 4

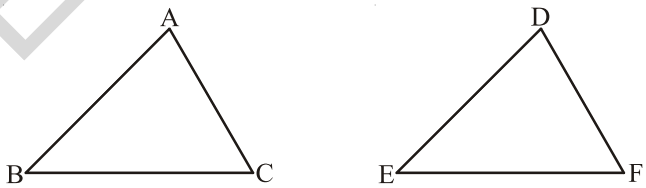
1. खालील एकरूपतेसाठी तुम्ही कोणत्या कसोटीचा वापर केला ?

(i) दिलेले : $AC = DF$

$AB = DE$

$BC = EF$

म्हणून, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

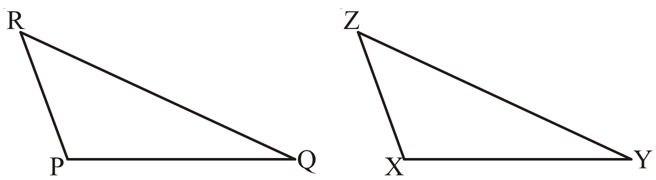


(ii) दिलेले : $ZX = RP$

$RQ = ZY$

$\angle PRQ \cong \angle XZY$

म्हणून, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

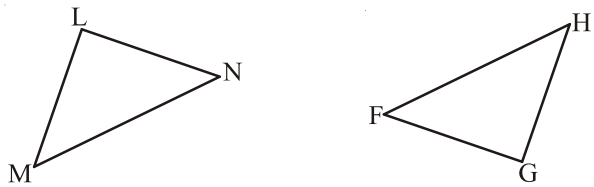


(iii) दिलेले : $\angle MLN \cong \angle FGH$

$\angle NML \cong \angle GFH$

$ML = FG$

म्हणून, $\Delta LMN \cong \Delta GFH$

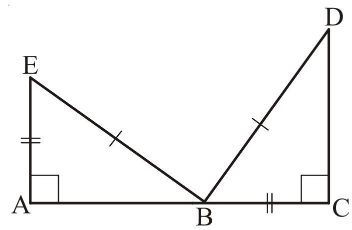


(iv) दिलेले : EB = DB

AE = BC

$\angle A = \angle C = 90^o$

म्हणून, $\Delta ABE \cong \Delta CDB$



2. तुम्हाला $\Delta ART \cong \Delta PEN$ दाखवायचे आहे

(i) जर तुम्ही बाबाबा कसोटी वापरली तर तुम्हाला दाखविण्याची आवश्यकता आहे.

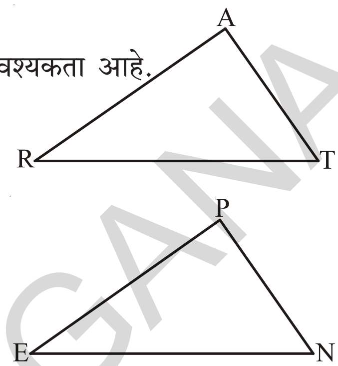
(a) AR = (b) RT = (c) AT =

(ii) जर तुम्हाला $\angle T = \angle N$ दिला आणि तुम्हाला बाकोबा कसोटी वापरावयाची आहे. तर तुम्हाला गरज आहे.

(a) RT = आणि (ii) PN =

(iii) जर तुम्हाला AT = PN दिले आहे आणि तुम्हाला कोबाको कसोटी वापरावयाची आहे तर तुम्हाला आवश्यक आहे.

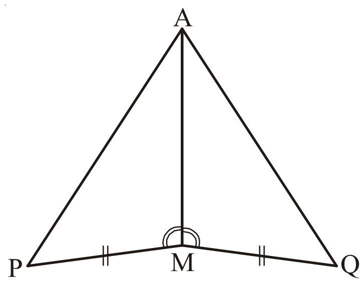
(a) ? (b) ?



3. तुम्हाला $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ दाखवायचे आहे

खालील सिद्धतेमध्ये गाळलेली कारण द्या.

पायऱ्या (टप्पे)	कारणे
(i) PM = QM	(i) ....
(ii) $\angle PMA \cong \angle QMA$	(ii) ....
(iii) AM = AM	(iii) ....
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv) ....



4. ΔABC मध्ये $\angle A = 30^o$, $\angle B = 40^o$ आणि $\angle C = 110^o$

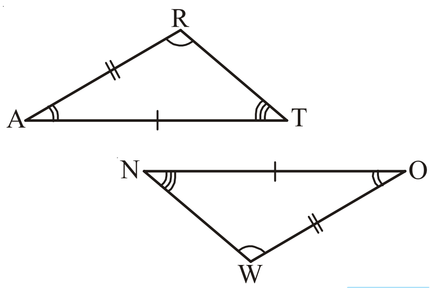
ΔPQR मध्ये , $\angle P = 30^o$, $\angle Q = 40^o$ आणि $\angle R = 110^o$

एक विद्यार्थी म्हणतो की, कोकोको कसोटीनुसार $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ आहेत. तो त्याचे समर्थन करतो काय? का किंवा का नाही ?

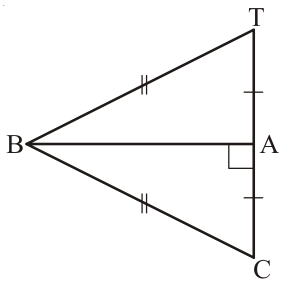
5. आकृतीमध्ये दोन एकरूप त्रिकोण आहेत.

संगत घटकांवर खुणा केलेल्या आहेत.

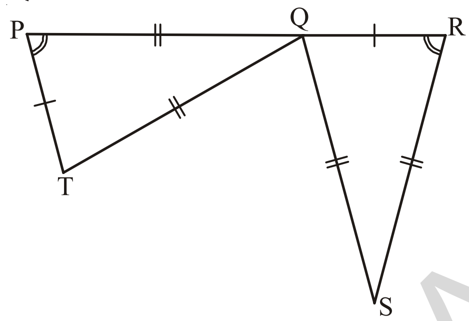
आपण $\Delta RAT \cong$ लिहू शकतो.



6. खालील त्रिकोणानांशी एकरूप त्रिकोण कोणते ते लिहा.



$\Delta ABC \cong ?$



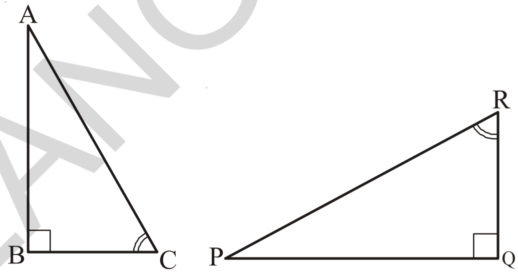
$\Delta QRS \cong ?$

7. एका चौरसाकृती शीटवर सारखेच क्षेत्रफळ असणारे दोन त्रिकोण असे काढा की,

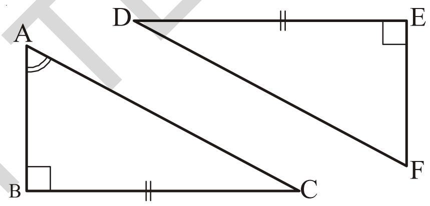
(i) ते परस्परांशी एकरूप असतील. (ii) ते परस्परांशी एकरूप नसतील.

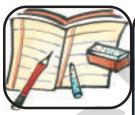
त्यांच्या परिमितीविषयी तुम्ही काय सांगू शकाल.

8. जर ΔABC आणि ΔPQR हे एकरूप असतील तर आणखी एका संगत घटकाच्या जोडीचे नाव लिहा यासाठी तुम्ही कोणती कसोटी वापरली.



9. $\Delta ABC \cong \Delta FED$ का आहेत स्पष्टीकरण द्या.





पाठ्यावलोकन

1. एकरूप वस्तू ह्या त्या वस्तू असतात ज्यांची मापे आणि आकार समान असतात.
2. प्रतलीय आकृत्या एकमेकांवर ठेवून आपण त्यांची एकरूपता तपासून शकतो.
3. दोन रेषाखंड AB आणि CD एकरूप आहेत हे आपण तेव्हाच म्हणू शकतो जर त्यांची लांबी समान असेल आपण ते $AB \cong CD$ असे लिहू शकतो तरीही सामान्यत: ते $AB = CD$ असेच लिहीतात.
4. एखाद्या त्रिकोणाचे सर्वच घटक दुस-या त्रिकोणाच्या सर्वच संगत घटकांशी समान (एकरूप) असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे म्हणतात.

5. दोन त्रिकोण एकरूप होण्यासाठीच्या आवष्यक आणि पुरेशा अटी खालीलप्रमाणे आहेत.

(i) एकरूपतेची बाजू-बाजू-बाजू बाबाबा कसोटी एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत बाजूच्या समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहे.

(ii) एकरूपतेचा बाजू कोन बाजू (बाकोबा) कसोटी एका त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्या बाजूमध्ये समाविष्ट कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत बाजू आणि त्या बाजूमध्ये समाविष्ट कोन यांच्याशी समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप अहेत असे म्हणतात.

(iii) एकरूपतेची कोन-बाजू- कोन कसोटी एका त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्यांच्यामध्ये समाविष्ट बाजू दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन आणि त्यांच्यामध्ये समाविष्ट बाजू यांच्याशी समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप असहेत असे म्हणतात.

(iv) काटकोन त्रिकोणात एकरूपतेची कर्ण -भुजा कसोटी :

एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आणि एक बाजू दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाचा संगत कर्ण आणि एक बाजू यांच्याशी समान असतील तर ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत असे म्हणतात.

त्रिकोणाची रचना 9

9.0 प्रस्तावना

तुम्ही या प्रकरणात त्रिकोणाची रचना कशी करतात हे शिकाल. त्रिकोण काढण्यासाठी तुम्हाला त्रिकोणाच्या तिनही बाजू व तिनही कोन या सर्व सहा घटकांची आवश्यकता नाही जर तुम्हाला दोन त्रिकोण एकरूप होण्यासाठी आवश्यक असलेले घटक माहित असतील, तर तुम्ही त्रिकोण काढू शकता. अशाप्रकारे खाली दिलेल्या कोणत्याही बाबीमध्ये तुम्ही त्रिकोन काढू शकता जर तुम्हाला माहीत असेल की,-

(i) त्रिकोणाच्या तीन बाजू (S S S) (बा. बा. बा.)

(ii) त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांच्यामध्ये समाविष्ट असलेल्या कोन (SAS) (बा. को. बा.)

(iii) त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्यांच्यामध्ये समाविष्ट असलेली बाजू (ASA) (को. बा. को.)

(iv) कर्ण आणि काटकोन त्रिकोणाची एक लगतची बाजू (R H S) (का. क. बा.)

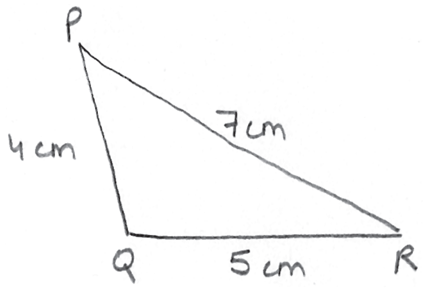
त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांच्यामध्ये समाविष्ट नसलेला कोन दिलेला असताना सुद्धा आपण त्रिकोण काढू शकतो. तेथे हे लक्षात ठेवणे महत्त्वाचे आहे की, ही अट ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे ठरविण्यासाठी पुरेशी नाही.

वरील प्रत्येक बाबींमध्ये त्रिकोणाची रचना कशी करायची हे आपण शिकू या.

9.1 त्रिकोणाच्या तीन बाजूंची मापे दिली असता त्रिकोण काढणे. (S S S) (बा. बा. बा.)

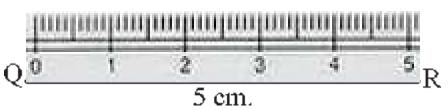
कोणत्याही भौमितीक आकृतीची रचना करताना/काढताना प्रथम तिची कच्ची आकृती ; काढल्यास आपणास तिच्या बाजू ओळखण्यासाठी मदत होते म्हणून आपण आपणास हव्या असलेल्या त्रिकोणाची प्रथम कच्ची आकृती काढली पाहीजे आणि दिलेली मापे लिहीली पाहिजेत

उदाहरण 1: Δ PQR मध्ये बाजू PQ = 4 सेमी बाजू QR = 5 सेमी आणि बाजू RP = 7 सेमी असेल तर Δ PQR काढा.



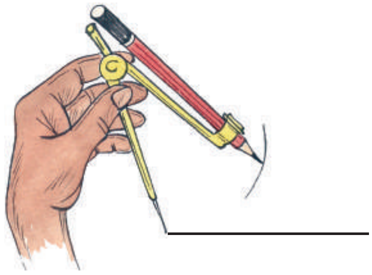
पायरी 1 : त्रिकोणाची कच्ची आकृती काढून दिलेली मापे त्यात दाखवा.

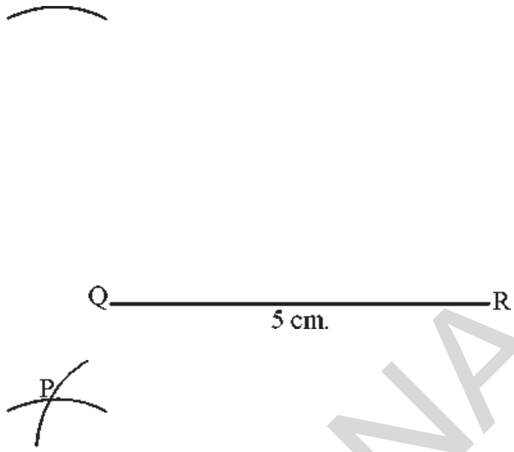
पायरी 2. 5 सेमी लांबी असलेला रेषाखंड QR काढा.



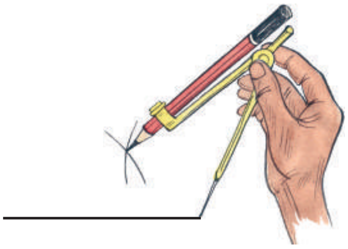
(मोज पट्टी दर्शवा)

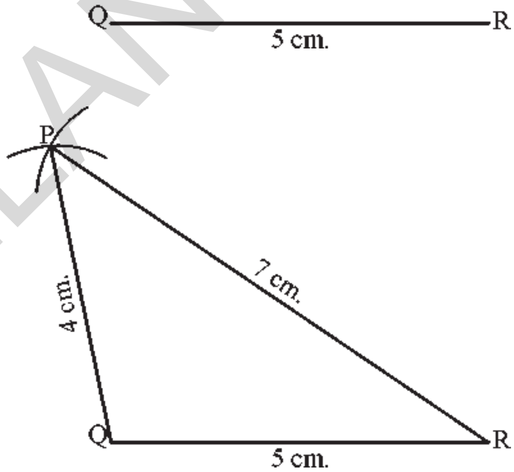
पायरी 3 : Q केंद्र घेउन, 4 सेमी त्रिज्या असलेला एक चाप (वृत्तकंस) काढा.





पायरी 4 : R पासून P चे अंतर (लांबी) 7 सेमी आहे 7बउ त्रिज्या असलेला दुसरा चाप (वृत्तकंस) R पासुन असा काढा की पहिल्या चापा (वृत्तकंसाला) P बिंदूजवळ छेदेल.





पायरी 5 : नंतर P,R.आणि Q,P जोडून घ्या. तुम्हाला हवा असलेला Δ PQR मिळेल.

सरावासाठी

1. वरील उदाहरणात दिलेल्या मापाचाच दुसरा त्रिकोण काढा. PQ पाया घ्या. ते त्रिकोण एकरूप आहते का ?

2. तुमच्या वहीत Δ PET असा काढा ज्यामध्ये PE = 4.5 सेमी, ET = 5.4 सेमी आणि TP = 6.5 सेमी. आता एका कागदावर Δ ABC, असा काढा ज्यामध्ये AB = 5.4 सेमी BC = 4.5 सेमी आणि CA = 6.5 सेमी व

   आता तो त्रिकोण कापा आणि तुमच्या वहीत काढलेल्या त्रिकोणावर ठेवा ते दोन त्रिकोण एकरूप आहेत का ? तुमचे उत्तर बैजिक चिन्हांच्या साहाय्याने दाखवा.

स्वाध्याय - 1

1. ΔABC असा काढा ज्यामध्ये $AB = 5.5$ सेमी $BC = 6.5$ सेमी आणि $CA = 7.5$ सेमी

2. ΔNIB असा काढा.ज्यामध्ये $NI = 5.6$ सेमी $IB = 6$ सेमी आणि $BN = 6$ सेमी हा त्रिकोणाचा कोणता प्रकार आहे.

3. 6.5 सेमी बाजू असलेला समभूज त्रिकोण ΔAPE काढा.

4. ΔXYZ असा काढा.ज्यामध्ये $XY = 6$ सेमी $YZ = 8$ सेमी आणि $ZX = 10$ सेमी कोनमापकाच्या साहाय्याने X. चा कोन मोजा हा त्रिकोणाचा कोणता प्रकार आहे.

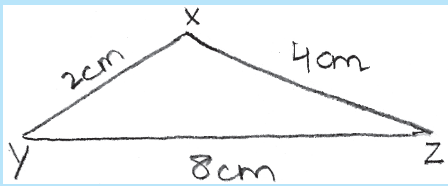
5. ΔABC असा काढा.ज्यामध्ये $AB = 4$ सेमी $BC = 7$ सेमी आणि $CA = 3$ सेमी हा त्रिकोणाचा कोणता प्रकार आहे.

6. ΔPEN असा काढा की $PE = 4$ सेमी $EN = 5$ सेमी आणि $NP = 3$ सेमी जर चाप (वृत्तकंस) काढण्याऐवजी तुम्ही वर्तुळे काढली तर तुम्हाला किती छेदनबिंदू मिळतील दिलेल्या मापानुसार किती त्रिकोण काढणे शक्य आहे. प्रत्येक त्रिकोणाच्या बाबतीत हे सत्य आहे का ?

सरावासाठी

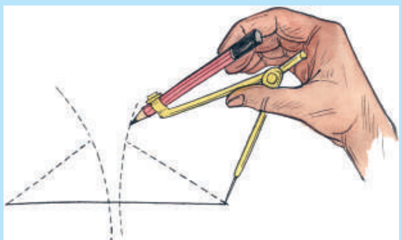
सुशांतला एक अडचण निर्माण झाली ΔXYZ असा काढा की $XY = 2$ सेमी $YZ = 8$ सेमी आणि $XZ = 4$ सेमी

त्याने आकृती 1 मध्ये दाखविल्यानुसार एक कच्ची आकृतीकाढली.



ही अडचण वाचून श्रीजा सुशांतला म्हणाली की, दिलेल्या मापाच्या साहाय्याने त्रिकोण काढणे शक्य होणार नाही.

तथापि सुशांतने आकृती 2 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे आकृती काढण्यास सुरूवात केली.

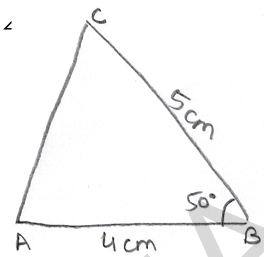


सुशांत त्रिकोण काढू शकतो का हे तपासा जर नसेल तर का ? तुमच्या मित्रासोबत चर्चा करा. श्रीजाच्या कल्पनेला (युक्तीला) त्रिकोणाचे कोणते गुणधर्म आधार देतात.

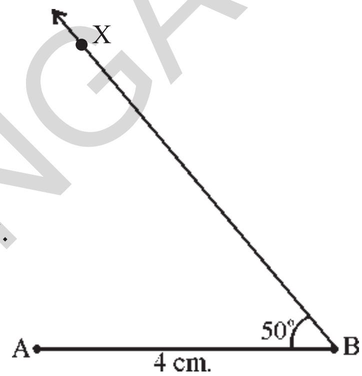
9.2 दोन बाजू आणि त्यांच्यामध्ये समाविष्ट असलेल्या कोन दिला असता त्रिकोण काढणे (बा को बा). (S A S)

उदाहरण 2 : ΔABC असा काढा की, AB = 4 सेमी BC = 5 सेमी आणि ∠

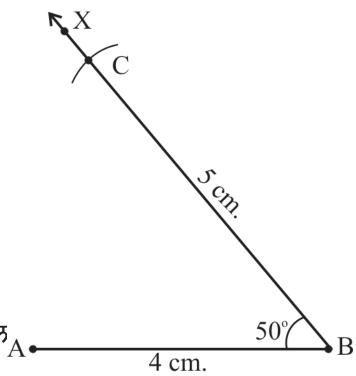
पायरी 1 : त्रिकोणाची कच्ची आकृती काढून दिलेली मापे त्यात दाखवा.



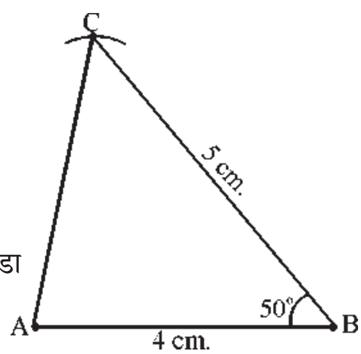
पायरी 2 : 4 सेमी बाजू असलेला रेषाखंड AB काढा.



पायरी 3 : बाजू AB सोबत $50°$ कोन होत असलेला किरण $\overrightarrow{BX}$ काढा.



पायरी 4 : B बिंदूवरून 5 सेमी त्रिज्या असलेला चाप वृत्तकसं किरण $\overrightarrow{BX}$ ला C बिंदूवर कापेल असा काढा.



पायरी 5 : तुम्हाला हवा असलेला ΔABC मिळविण्यासाठी C, A बिंदू जोडा

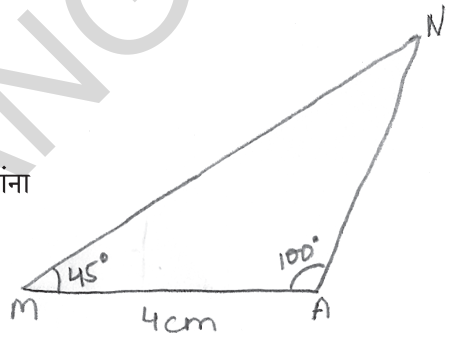
स्वाध्याय - 2

1. Δ CAR असा काढा ज्यामध्ये CA = 8 सेमी $\angle A = 60°$ आणि AR = 8 सेमी आता CR, $\angle R$ आणि $\angle C$ ची मापे मोजा. हा त्रिकोण कोणत्या प्रकारचा आहे.
2. Δ ABC असा काढा ज्यामध्ये AB = 5 सेमी $\angle B = 45°$ आणि BC = 6 सेमी
3. Δ PQR असा काढा ज्यामध्ये $\angle R = 100°$, QR = RP = 5.4 सेमी
4. Δ TEN असा काढा ज्यामध्ये TE = 3 सेमी $\angle E = 90°$ आणि NE = 4 सेमी

9.3 दोन कोन किंवा त्यांच्यामध्ये समाविष्ट असलेली बाजू दिली असता त्रिकोण काढणे.

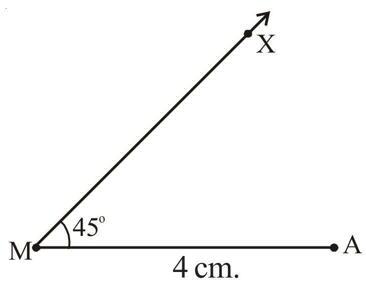
उदाहरण 3 : Δ MAN असा काढा ज्यामध्ये MA = 4 सेमी $\angle M = 45°$ आणि $\angle A = 100°$.

पायरी 1 : त्रिकोणाची कच्ची आकृती काढून दिलेली नावे मापे त्यांना द्या.

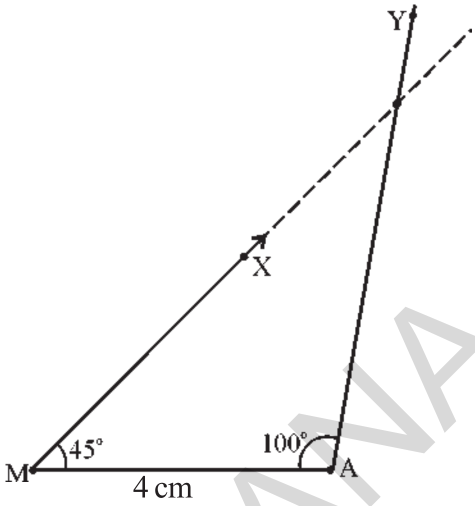


पायरी 2 : 4 सेमी लांबी असलेला रेषाखंड MA काढा.

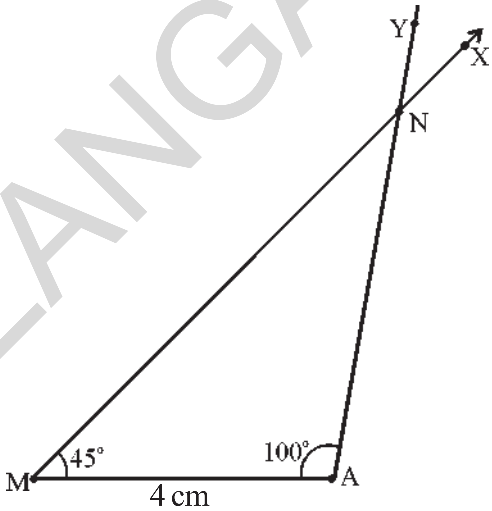
पायरी 3 : M बिंदूवर 45° होणारा किरण $\overrightarrow{MX}$ काढा.



पायरी 4 : A बिंदूवर 100^0 कोन करणारा किरण $\overrightarrow{AY}$ काढा. किरण $\overrightarrow{MX}$ किरण $\overrightarrow{AY}$ ला छेदण्यासाठी आवश्यकता असल्यास वाढवा.



पायरी 5 : दोन्ही किरणांचा छेदनबिंदुला N हे नाव द्या. तुम्हाला हवा असलेला Δ MAN मिळेल.



सरावासाठी

त्रिकोणाच्या कोनांची मापे 105^0 आणि 95^0 आहेत आणि एका बाजूची लांबी तुमच्या मनाने (पसंतीने) होऊन त्रिकोण काढा. तुम्ही त्रिकोण काढू शकता का ? चर्चा करा आणि समर्थन करा.

स्वाध्याय - 3

1. Δ NET असा काढा ज्यामध्ये NE = 6.4 सेमी $\angle N = 50°$ आणि $\angle E = 100°$.

2. Δ PQR असा काढा ज्यामध्ये QR = 6 सेमी $\angle Q = \angle R = 60°$ त्रिकोणाच्या इतर दोन बाजू मोजा आणि त्रिकोणाला नाव द्या.

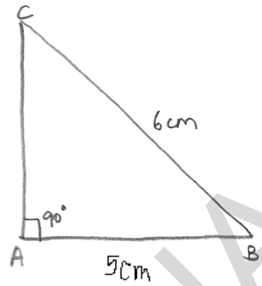
3. Δ RUN असा काढा ज्यामध्ये RN = 5 सेमी $\angle R = \angle N = 45°$ इतर कोन आणि इतर बाजू मोजा. त्रिकोणाला नाव द्या.

9.4 कर्ण आणि एक भुजा (बाजू) दिली असता काटकोन त्रिकोण काढणे

उदाहरण 4 : ΔABC असा काढा त्यामध्ये बिंदू A हा काटकोनात असेल आणि BC = 6 सेमी AB = 5 सेमी

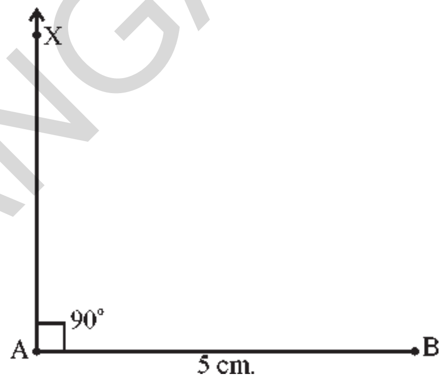
पायरी 1 : काटकोन त्रिकोनाची कच्ची आकृती काढून दिलेली माहिती दाखवा.

सूचना : काटकोनाला विरुद्ध असलेल्या बाजूला कर्ण म्हणतात.

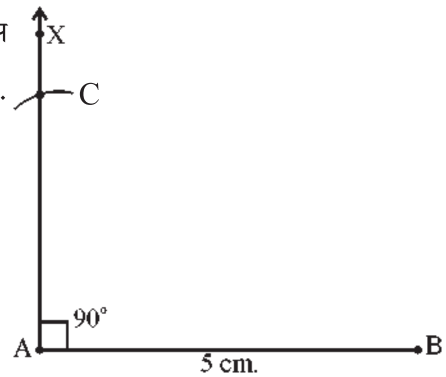


पायरी 2 : 5 सेमी लांबी असलेला रेषाखंड AB काढा.

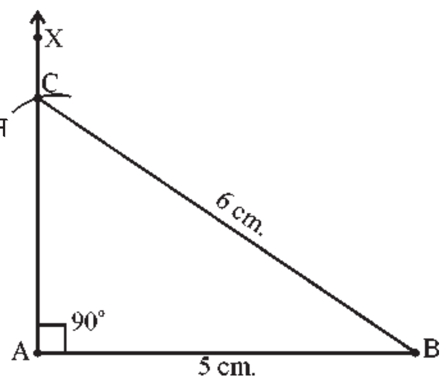
पायरी 3 : बाजू AB ला A या बिंदूत लंब असलेला किरण $\overrightarrow{AX}$ काढा.



पायरी 4 : 6 सेमी त्रिज्या असलेला बिंदू B मधून एक वृत्तकंस (चाप) असा काढा की जो $\overline{AX}$ ला 'C' बिंदूत छेदेल.



पायरी 5 : बिंदू B,C जोडून घ्या तुम्हाला हवा असलेला त्रिकोन ΔABC मिळेल.



स्वाध्याय - 4

1. काटकोन ΔABC असा काढा त्यामध्ये $\angle B = 90°$, $AB = 8$ सेमी आणि $AC = 10$ सेमी

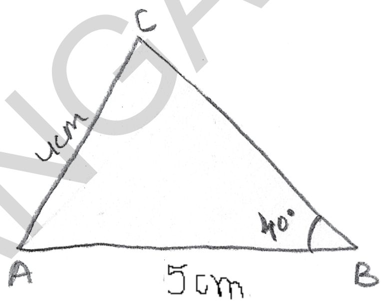
2. ΔPQR असा काढा की R बिंदू काटकोन असेल. कर्ण 5 सेमी आणि त्याच्या लगतची एक बाजू 4 सेमी आहे.

3. समद्विभुज काटकोन ΔXYZ असा काढा की ज्यामध्ये $\angle Y = 90°$ आणि दोन्ही बाजू प्रत्येकी 5 सेमी

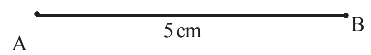
9.5 दोन बाजू आणि त्याच्यामध्ये समाविष्ट नसलेल कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.

उदाहरण 5 : ΔABC असा काढा ज्यामध्ये $AB = 5$ सेमी, $AC = 4$ आणि $\angle B = 40°$.

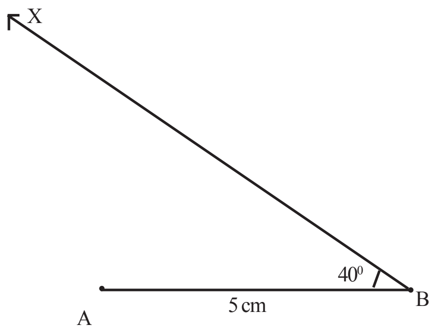
पायरी 1 : ΔABC ची कच्ची आकृती काढून दिलेली मापे, नावे त्यांना द्या.



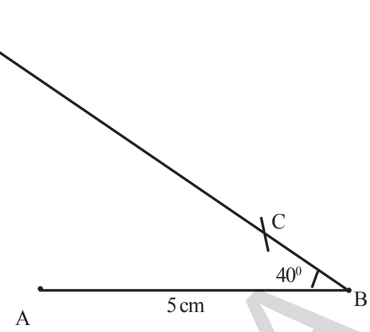
पायरी 2 : 5 सेमी लांबी असलेला रेषाखंड AB काढा.



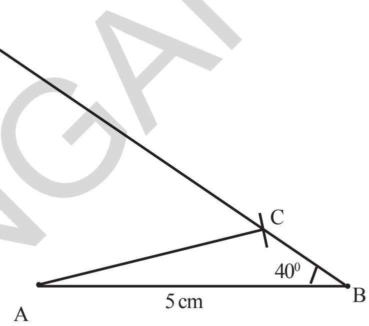
पायरी 3 : B बिंदूवर 40^0 कोन काढणारा किरण $\overrightarrow{BX}$ काढा.



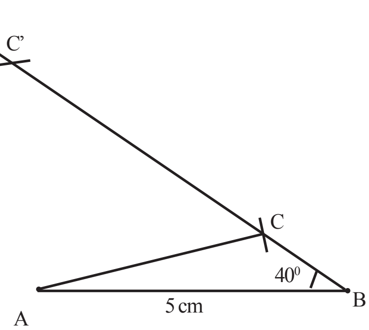
पायरी 4 : A ला केंद्र माना आणि 4 सेमी त्रिज्या घेवून किरण $\overrightarrow{BX}$ ला छेद देईल असा चाप (वृत्तकंस) काढा.



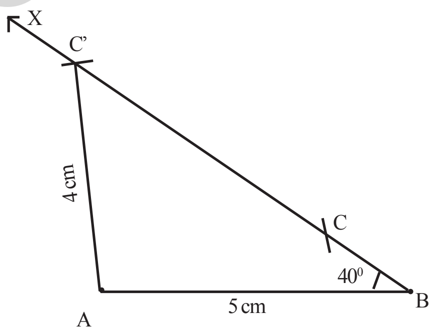
पायरी 5 : छेदून बिंदूला C नाव द्या आणि C, A जोडून घ्या तुम्हाला हवा असलेला ΔABC. मिळेल.

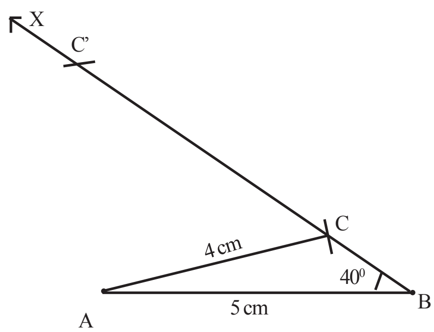


किरण $\overrightarrow{BX}$ ला तुम्ही इतर कोणत्याही बिंदूवर छेद देउ शकता का ? तुमच्या लक्षात येईल की $\angle B$ हा लघुकोन आहे आणि A पासून 4 सेमी त्रिज्या असलेला चाप किरण $\overrightarrow{BX}$ ला दोनदा छेद करतो.



म्हणून आपल्याला खाली दिल्याप्रमाणे दोन त्रिकोन मिळतात.





सरावासाठी

तुमच्या मनाने त्रिकोणाच्या दोन बाजूंची लांबी घ्या. त्याच्यामध्ये समाविष्ट नसलेल्या विशालकोन घेऊन त्रिकोण काढा. या बाबीमध्ये तुम्ही दोन त्रिकोण काढू शकता का ?

स्वाध्याय - 5

1. ΔABC असा काढा ज्यामध्ये $AB = 4.5$ सेमी $AC = 4.5$ सेमी आणि $\angle B = 50°$ तुम्हाला दोन त्रिकोन मिळतात का ते तपासा

2. ΔXYZ असा काढा ज्यामध्ये $XY = 4.5$ सेमी $XZ = 3.5$ सेमी आणि $\angle Y = 70°$ तुम्हाला दोन त्रिकोन मिळतात का ते तपासा.

3. ΔANR असा काढा ज्यामध्ये बाजू AN आणि बाजू AR ची लांबी अनुक्रमे 5 सेमी आणि 6 सेमी आहे आणि $\angle N\ 100^0$ आहे. तुम्हाला दोन त्रिकोन मिळतात का ते तपासा.

4. ΔPQR असा काढा ज्यामध्ये $QR = 5.5$ सेमी $QP = 5.5$ सेमी आणि $\angle Q = 60°$ RP चे माप मोजा हा कोणत्या प्रकारचा त्रिकोन आहे.

5. खालील सारणीमध्ये दिलेल्या मापानुसार त्रिकोन काढा.

त्रिकोण	मापे
ΔABC	$BC = 6.5$ सेमी, $CA = 6.3$ सेमी, $AB = 4.8$ सेमी
ΔPQR	$PQ = 8$ सेमी, $QR = 7.5$ सेमी, $\angle PQR = 85°$
ΔXYZ	$XY = 6.2$ सेमी, $\angle Y = 130°$, $\angle Z = 70°$
ΔABC	$AB = 4.8$ सेमी, $AC = 4.8$ सेमी, $\angle B = 35°$
ΔMNP	$\angle N = 90°$, $MP = 11.4$ सेमी, $MN = 7.3$ सेमी
ΔRKS	$RK = KS = SR = 6.6$ सेमी
ΔPTR	$\angle P = 65°$, $PT = PR = 5.7$ सेमी

पाठ्यावलोकन

आपण त्रिकोण काढू शकतो जेव्हा

(i) त्रिकोणाच्या तिनही बाजू दिल्या असता.

(ii) दोन बाजू आणि त्याच्यामध्ये समाविष्ट असलेला कोन दिला असता.

(iii) दोन कोन आणि त्याच्यामध्ये समाविष्ट असलेली बाजू दिली असता.

(iv) कर्ण आणि काटकोन त्रिकोणाची एक लगतची बाजू दिली असता.

(v) दोन बाजू आणि त्या दोन बाजूमध्ये समाविष्ट नसलेला कोन दिला असता.

बैजीक राशी

10

10.0 प्रस्तावना

चल पदाची किंमत बदलत असते तर अचल पदाची किंमत स्थिर असते, हे इयत्ता 6 वी मध्ये आपण यापूर्वी शिकलो आहोत. चल आणि अचल पदे दाखविण्यासाठी x, y, z, a, b , p, m इत्यादी अक्षरांचा वापर कसा होतो हे तुम्ही शिकला आहात.

$2x - 3$ आणि इतर सोप्या बैजीक राशी आपण बघितल्या आणि गणिती प्रकीया सुलभ करण्यासाठी उपयोगी ठरतात हेही आपण पाहिले आहे.

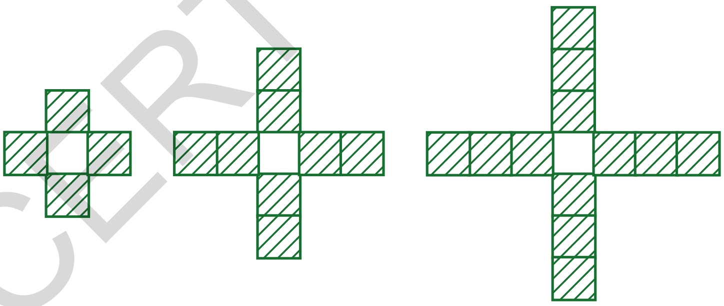
या प्रकरणात आपण बैजीक आपण बैजीक राशी, त्यांची बेरीज आणि वजाबाकी याविषयी अधिक शिकू या. तरी हे सर्व करण्याआधी आपण पदे सरूप पदे आणि भिन्न पदे व सहगुणक यांची ओळख करून घेऊ.

स्वाध्याय - 1

1. खालील आकृतीबंध तयार करण्यासाठी आगपेटीच्या किती काड्यांची आवश्यकता आहे हे सांगणारा नियम शोधा.

   (i) 'H' या अक्षराचा आकृतीबंध (ii) 'V' या अक्षराचा आकृतीबंध

2. रंगीत टाईल्स आणि पांढऱ्या टाईल्स पासून बनविलेला आकृतीबंध खाली दिलेला आहे.



आकृती 1 आकृती 2 आकृती 3

   (i) वरील आकृतीबंधाच्या पुढच्या दोन आकृती काढा.

   (ii) खालील सारणी भरा आणि आकृतीबंध बैजीक राशीत दाखवा.

आकृती क्रमांक	1	2	3	4	5
रंगीत टाईल्सची संख्या	4				

(iii) खालील सारणी भरा आणि आकृतीबंध बैजीक राशीत दाखवा.

आकृती क्रमांक	1	2	3	4	5
एकूण टाईल्सची संख्या	5				

3. खालील विधाने चलांचा,अचलांचा आणि अंकगणितीय प्रक्रियांचा उपयोग करून लिहा.

(i) 6 मोठे आहेत p पेक्षा

(ii) 'x' मधून 4 कमी केले

(iii) y मधून 8 वजा केले

(iv) q ला '-5' ने गुणले

(v) y भागिले 4

(vi) 'p' आणि 'q' यांच्या गुणाकाराचा एक चतुर्थांश

(vii) 'z' च्या तिपटीमध्ये 5 मिळविले

(viii) 10 मध्ये 10 मध्ये ह्व गुणिले 5 मिळविले

(ix) 'y' च्या दुपटीमधून 5 वजा

(x) 13 मध्ये y गुणिले 10 मिळविले.

4. खालील राशी विधांनामध्ये लिहा.

(i) $x + 3$ (ii) $y - 7$ (iii) $10l$

(iv) $\frac{x}{5}$ (v) $3m + 11$ (vi) $2y - 5$

5. खाली काही माहिती दिली आहे. माहितीमधील संख्या ही चल आहे की अचल हे नमूद करा.

उदा. आमचे वय - यामधील किमती बदलत असतात म्हणून हे संख्यात्मक चलाचे उदाहरण आहे.

(i) जानेवारी महिन्यातील दिवसांची संख्या

(ii) एखाद्या दिवसाचे तापमान

(iii) तुमच्या वर्गाची लांबी

(iv) वाढत्या रोपट्याची उंची

10.1 बैजीक राशी अंकगणितीय पद.

$2x + 9$ या बैजीक राशीचा विचार करा.

येथे 'x' ला दोनने गुणले आणि नंतर त्यामध्ये 9 मिळविले **'$2x$' '9'** या बैजीक राशीत **$2x + 9$** ला संख्यात्मक पद असे म्हणतात. **'$2x$'** ला बैजीक पद तर **'9'** ला संख्यात्मक असे म्हणतात.

$3x^2 - 11y$ या दुसऱ्या बैजीक राशीचा विचार करा.

$3x^2$ हा 3, x आणि x यांच्या गुणाकाराने तयार झालेला आहे. 11y हा 11 आणि y यांचा गुणाकार आहे. $3x^2 - 11y$ ही बैजीक राशी मिळण्यासाठी $3x^2$ मधून 11y वजा केले. $3x^2 - 11y$ या बैजीक राशीत $3x^2$ हे एक पद आणि 11y हे दुसरे पद आहे.

> जेव्हा आपण x चा x शी गुणाकार करतो तेव्हा आपण हे x^2 असे लिहू शकतो. हे $4 \times 4 = 4^2$ लिहिण्यासारखेच आहे. तसेच जेव्हा आपण x चा तीन वेळा गुणाकार करतो $x \times x \times x$ तेव्हा आपण तो x^3 असे लिहू शकतो. त्याचप्रमाणे $6 \times 6 \times 6 = 6^3$

सरावासाठी

खालील बैजीक राशीतील सर्व पदे ओळखा.

(i) $5x^2 + 3y + 7$ (ii) $5x^2y + 3$ (iii) $3x^2y$

(iv) $5x - 7$ (v) $5x + 8 - 2(-y)$ (vi) $7x^2 - 2x$

10.1.1 सरूप आणि भिन्नरूप पदे

चला तर खालील उदाहरणांचे निरीक्षण करूया.

(i) $5x$ आणि $8x$ (ii) $7a^2$ आणि $14a^2$

(iii) $3xy$ आणि $4xy$ (iv) $3xy^2$ आणि $4x^2y$

पहिल्या उदाहरणात दोन्ही पदात चल समान आहेत ते म्हणजे x आणि चलाचे घातांक सुध्दा समान आहेत जो की 1 आहे

दुसऱ्या उदाहरणात दोन्ही पदात चल समान आहेत ते म्हणजे a आणि चलाचे घातांक सुध्दा समान आहेत. जसे 2

तिसऱ्या उदाहरणात दोन्ही पदात चल समान आहेत ते x आणि y चा घातांक 1 आहे आणि लचा घातांक 1 आहे.

चौथ्या उदाहरणात दोन्ही पदात चल समान आहेत ते म्हणजे x आणि y परंतु त्याचे घातांक सारखे नाहीत पहिल्या पदात x चा घातांक 1 आहे आणि दुसऱ्या पदात 2 घातांक आहे. तसेच पहिल्या पदात y चा घातांक 2 आणि दुसऱ्या पदात y चा घातांक 1 आहे.

पदांच्या पहिल्या तीन जोडया हया सरूप पदांची उदाहरणे आहेत तर चौथे पद हे भिन्न रूप पदाचे उदाहरण आहे.

सरूप पदात चले आणि समान घातांक असतात.

सरावासाठी

1. सरूप पदांचा एकत्र गट करा.

   $12x, 12, 25x, -25, 25y, 1, x, 12y, y, 25xy, 5x^2 y, 7xy^2, 2xy, 3xy^2, 4x^2y$

2. खरे किंवा खोटे ते नमूद करा आणि तुमच्या उत्तराकरिता कारण द्या.

   (i) $7x^2$ आणि $2x$ ही भिन्नरूप पदे आहेत.
   (ii) pq^2 आणि $-4pq$ ही सरूप पदे आहेत.
   (iii) xy, $-12x^2y$ आणि $5xy^2$ ही सरूप पदे आहेत.

10.2 सहगुणक

9xy मध्ये

'xy' चा सहगुणक 9 आहे. जसे	$9(xy) = 9xy$
'$9y$' चा सहगुणक 'x' आहे. जसे	$x(9y) = 9xy$
'$9x$' चा सहगुणक 'y' आहे. जसे	$y(9x) = 9xy$
'y' चा सहगुणक '$9x$' आहे. जसे	$9x(y) = 9xy$
'x' चा सहगुणक $9y$ आहे. जसे	$9y(x) = 9xy$
9 चा सहगुणक xy आहे. जसे	$xy(9) = 9xy$

ज्या अर्थी 9 ला संख्यात्मक किंमत आहे म्हणून त्याला संख्यात्मक सहगुणक असे म्हणतात.

x, y आणि xy हे शाब्दिक सहगुणक आहेत कारण ती चल पदे आहेत.

त्यावरून '$-5x$' मध्ये, '-5' अंकात्मक सहगुणक तर 'x' हा अक्षरात्मक सहगुणक आहे

सरावासाठी

(i) 'x' चा संख्यात्मक सहगुणक काय आहे ?
(ii) '$-y$' चा संख्यात्मक सहगुणक काय आहे ?
(iii) '$-3z$' चा शाब्दीक स्थिर असतो काय ?
(iv) संख्यात्मक सहगुणक स्थिर (कायम) असतो काय ?
(v) शाब्दीक सहगुणक हा नेहमीच चल असतो काय ?

10.3 राशी

एकच पद किंवा पदांचा समूह बेरजेने '+' किंवा वजाबाकीने '–' असतो त्यास राशी असे म्हणतात.

उदा :- $6x + 3y$, $3x^2 + 2x + y$, $10y^3 + 7y + 3$, $9a + 5$, $5a + 7b$, $9xy$, $5 + 7 - 2x$, $9 + 3 - 2$

टीप :- गुणाकार ह्र आणि भागाकार वेगळे नाहीत.

उदा :- $2x \times 3y$ आणि $\dfrac{2x}{3y}$ या एकपदी आहेत.

सरावासाठी

1. खालील प्रत्येक राशीमध्ये किती पदे आहेत ?

(i) $x + y$ (ii) $11x - 3y - 5$ (iii) $6x^2 + 5x - 4$

(iv) $x^2z + 3$ (v) $5x^2y$ (vi) $x + 3 + y$

(vii) $x - \frac{11}{3}$ (viii) $\frac{3x}{7y}$ (ix) $2z - y$ (x) $3x + 5$

10.3.1 संख्यात्मक राशी आणि बैजीक राशी

खालील उदाहरणे विचारात घ्या.

(i) $1 + 2 - 9$ (ii) $-3 - 5$ (iii) $x - \frac{11}{3}$ (iv) $4y$

(v) $9 + (6-5)$ (vi) $3x + 5$ (vii) $(17-5) + 4$ (viii) $2x - y$

तुम्हाला उदा. (i), (ii), (v) आणि (vii) मध्ये एखादे बैजीक पद सापडले का?

जर एखाद्या राशीतील सर्व पदे ही स्थिर असतील तर त्या राशीला संख्यात्मक राशी असे म्हणतात.

जर एखाद्या राशीत एक जरी बैजिकपद असेल तर त्या राशीला बैजीक राशी असे म्हणतात.

वरील उदाहरणातील बैजीक राशी कोणत्या आहेत ?

सरावासाठी

प्रत्येकी तीन पदे असणाऱ्या 3 बैजीक राशी लिहा.

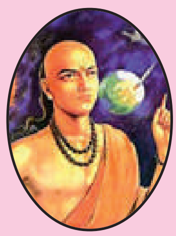
आर्यभट्ट (भारत)

475 . 550 इ.स. पूर्व

त्यांनी बैजीक राशीचे लेखन केले, आर्यभट्ट(499 इ.स. पूर्व)

इ.स. 5 व्या शतकातील थोर भारतीय गणिती आर्यभट्ट यांनी

पहिल्यांदा बैजीक राशींचा वापर केला.



10.3.2 बैजीक राशींचे प्रकार

बैजीक राशींना त्यांच्यामध्ये असलेल्या पदांच्या संख्येवरून नावे दिली आहेत.

पदांची संख्या	पदावलीचे नाव	उदाहरणे
एकपद	एकपदी	(a) x (b) $7xyz$ (c) $3x^2y$ (d) qz^2
दोन भिन्न पदे	द्विपदी	(a) $a + 4x$ (b) $x^2 + 2y$ (c) $3x^2 - y^2$
तीन भिन्न पदे	त्रिपदी	(a) $ax^2 + 4x + 2$ (b) $7x^2 + 9y^2 + 10z^3$
एकापेक्षा जास्त भिन्न पदे	बहूपदी	(a) $4x^2 + 2xy + cx + d$ (b) $9p^2 - 11q + 19r + t$

टीप :- द्विपदी, त्रिपदी हया सुध्दा बहुपदी असतात.

सरावासाठी

1. बैजीक राशींच्या प्रत्येक प्रकारची दोन उदाहरणे द्या.
2. खाली दिलेल्या राशींच्या एकपदी, द्विपदी, त्रिपदी किंवा बहुपदी आहेत ते ओळखा.

   (i) $5x^2 + y + 6$ (ii) $3xy$

   (iii) $5x^2y + 6x$ (iv) $a + 4x - xy + xyz$

10.4 बैजिक राशीचा घात

बैजीक राशीच्या घाताची चर्चा करण्यापूर्वी आपण एकपदींचा घात म्हणजे काय हे समजुन घेऊ.

10.4.1 एकपदीचा घात

$9x^2 y^2$ ही राशी विचारात घ्या.

वरील पदामध्ये 'x' चा घातांक किती आहे ?

वरील पदामध्ये 'y' चा घातांक किती आहे ?

या दोन्ही घातांकाची बेरीज किती आहे ?

एखाद्या चलपदामध्ये असलेल्या चलाच्या घातांकाच्या बेरजेला त्या पदाचा घात किंवा एकपदीचा घात असे म्हणतात.

खालील सारणीचा अभ्यास करा

अ.क्र.	एकपदी	घातांक			एकपदीचा घात
		x	y	z	
1	x	1	-	-	1
2	$7x^2$	2	-	-	2
3	-3xyz	1	1	1	1 + 1 + 1 = 3
4	$8y^2z^2$	-	2	2	2 + 2 = 4

10.4.2 स्थिरपदांचा घात

आता आपण स्थिरपदांच्या घातांकाविषयी चर्चा करूया.

जेव्हा $x^0 = 1$, तेव्हा आपण 5 ला $5x^0$ असे म्हणू किंवा लिहू शकतो.

यालाच स्थिरपदाचा शून्य असे म्हणतात. यामध्ये 5 चा घात '0' असे म्हटले जाते..

स्थिरपदाचा अंश शून्य असतो.

10.4.3 बैजीक राशींचा घात

खालील सारणीचा अभ्यास करा

अ.क्र.	बैजीक राशी	प्रत्येक पदाचा घात				सर्वात मोठा घात
		प्रथम पद	द्वितीय पद	तृतीय पद	चतुर्थ पद	
1.	$7xy^2$	3	-	-	-	3
2	$3y - x^2y^2$	1	4	-	-	4
3	$4x^2 + 3xyz + y$	2	3	1	-	3
4	$pq - 6p^2q^2 - p^2q + 9$	2	4	3	0	4

दुसऱ्या उदाहरणात एका पदाचा सर्वात मोठा घात 4 आहे.

म्हणून त्या राशीचा घात 4 आहे.

तसेच तिसऱ्या राशीचा घात 3 आहे आणि चौथ्या राशीचा घात 4 आहे.

राशीमधील सर्वात जास्त घात असलेल्या पदाला त्या बैजीक राशीचा घात असे म्हणतात.

स्वाध्याय 2

1. खालील प्रत्येक गटातील सरूप पदे ओळखा आणि लिहा.

(i) $a^2, b^2, -2a^2, c^2, 4a$ (ii) $3a, 4xy, -yz, 2zy$

(iii) $-2xy^2, x^2y, 5y^2x, x^2z$ (iv) $7p, 8pq, -5pq, -2p, 3p$

2. खालिल राशी संख्यात्मक आहेत की बैजीक आहेत ते लिहा

(i) $x + 1$ (ii) $3m^2$ (iii) $-30 + 16$

(iv) $4p^2-5q^2$ (v) 96 (vi) x^2-5yz

(vii) $215x^2yz$ (viii) $95 \div 5 \times 2$ (ix) $2 + m + n$

(x) $310 + 15 + 62$ (xi) $11a^2+6b^2-5$

3. खाली दिलेल्या बैजिक राशी हया एकपदी, व्दिपदी, त्रिपदी किंवा बहुपदी आहेत ते नमूद करा.

(i) y^2 (ii) $4y - 7z$ (iii) $1 + x + x^2$

(iv) $7mn$ (v) $a^2 + b^2$ (vi) 100

(vii) $ax + 9$ (viii) $p^2 - 3pq + r$ (ix) $3y^2 - x^2 y^2 + 4x$

(x) $7x^2 - 2xy + 9y^2 - 11$

4. खालील प्रत्येक एकपदीचे घात किती ?

(i) $7y$ (ii) $-xy^2$ (iii) xy^2z^2

(iv) $-11y^2z^2$ (v) $3mn$ (vi) $-5pq^2$

5. प्रत्येक बैजीक राशीचे घात शोधा.

(i) $3x-15$ (ii) $xy + yz$ (iii) $2y^2z + 9yz -7z - 11x^2y^2$

(iv) $2y^2z + 10yz$ (v) $pq + p^2q - p^2q^2$ (vi) $ax^2 + bx + c$

6. समान घात असलेल्या कोणत्याही दोन बैजिक राशी लिहा.

10.5 सरूप पदांची बेरीज आणि वजाबाकी

खालील उदाहरणे लक्षात घ्या.

1. विनयजवळ असलेल्या पेन्सिलीची संख्या ही सिधूजवळील पेन्सिलीच्या चौपटीएवढी आहे.तर दोघांकडील एकुण पेन्सिलींची संख्या किती ?

2. टोनी आणि बाशा एका स्टोअर्समध्ये गेले.टोनीने 7 पुस्तके आणि बाशाने 2 पुस्तके. खरेदी केले सर्व पुस्तकांची किंमत, सारखीच आहे. तर टोनीने बाशापेक्षा किती जास्त रक्कम खर्च केली

अशा प्रकारच्या प्रश्नांचे उत्तर शोधण्यासाठी प्रथम आपल्याला सरूप पदांची बेरीज आणि वजाबाकी कशी करतात हे माहित असणे आवश्यक आहे.

1 दिलेल्या उदाहरणात सिधुजवळ असलेल्या पेन्सिलींची संख्या दिलेली नाही,

म्हणुन आपण 'x' समजू.

विनयजवळ सिद्दू पेक्षा 4 पट पेन्सिली आहेत. म्हणजेच, $4 \times x = 4x$

एकुण पेन्सिलींची संख्या $= x + 4x = (1 + 4)\ x = 5x$ (विभागणीचा नियम.)

2. प्रत्येक पुस्तकांची किंमत येथे दिलेली नाही म्हणुन आपण ती y समजु

म्हणुन टोनीने खर्च केलीली रक्कम $7 \times y =$ ₹.$7y$

बाशाने खर्च केलेली रक्कम $2 \times y =$ ₹. $2y$

टोनीने बाशापेक्षा किती जास्त रक्कम खर्च केली हे काढण्यासाठी $7y$ मधुन $2y$ वजा करू.

म्हणुन टोनीने खर्च केलेली जास्तीची रक्कम $= 7y - 2y = (7-2)y =$ ₹.$5y$ (विभागणीचा नियम)

अशाप्रकारे आपण निष्कर्ष काढू शकतो की,

दोन किंवा अधिक सरूप पदांची बेरीज करतांना त्या पदांच्या सहगुणकाची बेरीज करून त्यापुढे चल लिहतात.

दोन किंवा अधिक सरूप पदांची बेरीज सरूप असते.दोन सरूप पदांची वजाबाकी ही सरूप असते.

दोन सरूप पदांची वजाबाकी करतांना त्या पदांच्या सहगुणकांची वजाबाकी करून त्यापुढे चल लिहतात.

सरावासाठी

1. सरूप पदांची बेरीज करा.

(i) $5x, 7x$ (ii) $7x^2y, -6x^2y$ (iii) $2m, 11m$

(iv) $18ab, 5ab, 12ab$ (v) $3x^2, -7x^2, 8x^2$ (vi) $4m^2, 3m^2, -6m^2, m^2$

(vii) $18pq, -15pq, 3pq$

2. दुसऱ्या पदातुन पहीले पद वजा करा.

(i) $2xy, 7xy$ (ii) $5a^2, 10a^2$ (iii) $12y, 3y$

(iv) $6x^2y, 4x^2y$ (v) $6xy, -12xy$

10.5.1. भिन्नरूप पदांची बेरीज आणि वजाबाकी

$3x$ आणि $4y$ ही भिन्न पदे आहेत. त्यांची बेरीज $3x + 4y$ अशी लिहिली जाते.

ज्या अर्थी 'x' आणि 'y' ही भिन्न पदे आहेत तेव्हा भिन्नतेचा नियम लागू शकत नाही. यामुळे त्यांची बेरीज होऊ शकत नाही.

10.6 10.6 बैजीक राशींचे सरळरूप.

$9x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xy - y^2 - 3x^2 - 6xy$ ही राशी विचारात घ्या.

वरील राशीमध्ये काही सरूप पदे आहेत. जसे $9x^2$ आणि $-3x^2$; $5y^2$ आणि y^2

यातील सरूप पदांची बेरीज केली असता आपल्याला बैजीक राशी सरळ रूपात मिळते.

वर दिलेल्या बैजिक राशीला सरळरूप कसे दिले आहे ते बघा.

अ.क्र.	पायरी	प्रक्रिया
1.	सरळरूप लिहा	$9x^2-4xy+5y^2+2xy-y^2-3x^2+6xy$
2.	गट एकत्र करा	$(9x^2-3x^2)+(2xy-4xy+6xy)+(5y^2-y^2)$
3.	सजातीय पदे एकत्र करा	$(9-3)x^2+(2-4+6)xy+(5-1)y^2=6x^2+4xy+4y^2$

टीप : जर एखादया राशीतील दोन पदे सरूप नसतील तर ती राशी सरळरूपात आहे असे म्हणतात.

आपण दुसरे एक उदाहरण अभ्यासू.

$5x^2y+2x^2y+4+5xy^2-4x^2y-xy^2-9$

पायरी 1: $5x^2y+2x^2y+4+5xy^2-4x^2y-xy^2-9$

पायरी 2: $(5x^2y+2x^2y-4x^2y)+(5xy^2-xy^2)+(4-9)$ (सरुप पदे एका जवळ आणणे)

पायरी 3: $3x^2y+4xy^2-5$

सरावासाठी

1. सोडवा

(i) $3m+12m-5m$ (ii) $25yz-8yz-6yz$

(iii) $10m^2-9m+7m-3m^2-5m-8$ (iv) $9x^2-6+4x+11-6x^2-2x+3x^2-2$

(v) $3a^2-4a^2b+7a^2-b^2-ab$ (vi) $5x^2+10+6x+4+5x+3x^2+8$

10.7 राशीचे प्रमाणित रूप

$3x+5x^2-9$ ही राशी विचारात घ्या. पहिल्या दुसऱ्या आणि तिसऱ्या पदाचा घात अनुक्रमे 1,2 आणि 0 आहे अशा प्रकारे पदांचे घात हे उतरत्या क्रमाने नाहीत.

म्हणून आपण पदांची अशा रीतीने पुनर्मांडणी करूया की त्यांचे घात हे उतरत्या क्रमाने येतील.

आता आपल्याला $5x^2+3x-9$ ही राशी मिळते. आता ही राशी प्रमाणित रूपात आहे असे म्हटले जाते.

आता आपण 3c + 6a –2b ही राशी विचारात घेउया या राशीतील प्रत्येंक पदाचा घात समान आहे. जर आपण ती 6a –2b + 3c अशी लिहीली तर ती अधिक चांगली दिसेल.

एखाद्या राशीतील पदांची अशाप्रकारे पुनर्मांडणी केली की, त्या राशीतील पदांचे घात उतरत्या क्रमाने येतील तेव्हा राशी प्रमाणित करून आहे असे म्हणतात.

प्रमाणित राशीची उदाहरणे (i) $7x^2+2x+11$ (ii) $5y^2-6y-9$

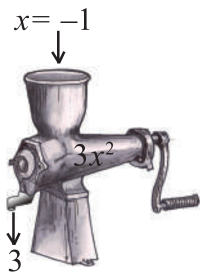
सरावासाठी

1. प्रमाणित रूपात लिहा.
   (i) $3x+18+4x^2$ (ii) $8-3x^2+4x$
   (iii) $-2m+6-3m^2$ (iv) $y^3+1+y+3y^2$

2. प्रमाणित रूपात आहे का ते ओळखा ?
   (i) $9x^2 + 6x + 8$ (ii) $9x^2 + 15 + 7x$
   (iii) $9x^2 + 7$ (iv) $9x^3 + 15x + 3$
   (v) $15x^2 + x^3 + 3x$ (vi) $x^2y + xy + 3$
   (vii) $x^3 + x^2y^2 + 6xy$

3. कोणत्याही 5 राशी लिहा.

10.8 बैजिक राशीची किंमत शोधणे.



उदा. 1 जर $x=-1$ असेल तर $3x^2$ची किंमत शोधा.

उकल : 1 ली पायरी : $3x^2$ (बैजिक राशी लिहा)

2 री पायरी : $3(-1)^2$ (चलाच्या दिलेल्या किंमती लिहा.)

3 री पायरी : $3(1) = 3$

उदा. 2 जर $x=0$ $y=-1$ असेल तर x^2-y+2 ची किंमत शोधा.

उकल : 1 ली पायरी : x^2-y+2 (बैजिक राशी लिहा)

2 री पायरी : $0^2-(-1)+2$ (चलाच्या दिलेल्या किंमती लिहा.)

3 री पायरी : $1+2=3$

उदा. 3 त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $A=\frac{1}{2}bh$ (पायाह्वउंची)

जर पाया $b = 12$ cm आणि $h = 7$cm असेल तर त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ किती ?

उकल : 1 ली पायरी : त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $A=\frac{1}{2}bh$ (पाया ह्व उंची)

2 री पायरी : $A=\frac{1}{2}\times12\times7$

3 री पायरी : $A=42$ चौरस सेमी.

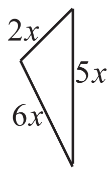
सरावासाठी

1. जर $x = -3$. तर '$-9x$' या राशीचा किंमत शोधा.
2. जेव्हा $x = -3$ असेल तर अशी राशी लिहा तिची किंमत -9 असेल

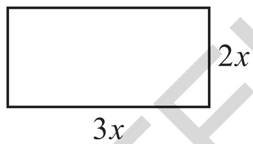
स्वाध्याय - 3

1. खाली दिलेल्या रेषाखंड PR ची लांबी 'a'. या पदात शोधा.

2. (i) खालील त्रिकोणाची परिमिती शोधा.



(ii) खालील आयताची परिमिती शोधा



3. पहिल्या पदातुन दुसरे पद वजा करा.

(i) $8x, 5x$ (ii) $5p, 11p$ (iii) $13m^2, 2m^2$

4. जर $x = 1$. असेल तर खालील एकपदींचा किंमती शोधा.

(i) $-x$ (ii) $4x$ (iii) $-2x^2$

5. $4x + x - 2x^2 + x - 1$ ला सरळ रूप द्या आणि जेव्हा $x = -1$.

6. जेव्हा $x = -2$ असेल तर. $5x^2 - 4 - 3x^2 + 6x + 8 + 5x - 13$ सोडवा आणि किंमत शोधा

7. जर $x = 1$; $y = 2$ असेल तर ह्या समिकरणाची किंमत काढा.

(i) $4x - 3y + 5$ (ii) $x^2 + y^2$ (iii) $xy + 3y - 9$

8. आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी $A = l \times b$. जर $l = 9$cm, $b = 6$cm, क्षेत्रफळ काढा?

9. सरळ व्याजाचे सूत्र $I = \dfrac{PTR}{100}$. जर P = ₹. 900, T = 2 वर्षे; जर R = 5%, सरळव्याज काढा.

10. $s = \frac{d}{t}$. शोधा d = 135 मीटर आणि= 10 सेकंद

10.9 बैजिक राशीची बेरीज :

खालील उदाहरणे लक्षात घ्या.

1. समीरा जवळ काही आंबे आहेत.

पद्माजवळ समीरापेक्षा 9 आंबे जास्त आणि समीरा आणि पद्मा या दोघीजवळ एकत्र केलेल्या आंब्यापेक्षा 4 आंबे जास्त माझाकडे आहेत, अशी मेरी म्हणते तर मेरीकडे किती आंबे आहेत ?

समीराजवळ किती आंबे आहेत हे आपल्याला माहित नाही.

समजा तिच्याजवळ x आंबे आहेत.

पद्माकडे समिरापेक्षा 9 जास्त आंबे आहेत.

पद्माकडील आंब्याची संख्या = $x + 9$ आंबे

मेरीकडे या दोघीकडे असलेल्या आंब्यापेक्षा 4 जास्त आंबे आहेत.

मेरीकडे असलेले आंबे $= x + (x + 9) + 4$

$= 2x + 13$ आंबे

2. गणिताच्या चाचणीमध्ये राजूला इमरानपेक्षा 11 मार्क जास्त मिळाले राहुलला राजु आणि इमरान या दोघांच्या एकत्रित गुणापेक्षा 4 गुण कमी मिळाले तर राहुलला किती गुण मिळाले ?

आपल्याला इमरानचे गुण माहित नाहीत म्हणुन आपण इमरानला x गुण मिळाले.

सूचना : आपण इमरानचे गुण $= x$ का घेतले ?

राजूला इमरानपेक्षा 11 गुण जास्त मिळाले

4 गुण राहुलला राजू आणि इमरान या दोघांच्या एकत्रित गुणापेक्षा 4 गुण कमी मिळाले

$= x + x + 11 - 4$ गुण

$= 2x + 7$ गुण

वरील दोन्ही उदाहरणामध्ये आपल्याला बैजिक राशींची बेरीज आणि वजाबाकी करावी लागते.

दैनंदीन जीवनात अनेक प्रसंग येतात जेथे आपल्याला या गोष्टी गरजेच्या असतात.

आता आपण बैजिक राशींची बेरीज वजाबाकी शिकु या.

10.9.1 बैजिक राशींची बेरीज

सरूप पदांची बेरीज करून जी बैजिक राशींची बेरीज मिळते ती आपल्याला दोन प्रकारे करता येते.

(i) पदस्तंभ किंवा उभी मांडणी पद्धत.

(ii) पद रांगा किंवा आडवी मांडणी पद्धत

(i) (1) स्तंभ किंवा उभी मांडणी पद्धत.

उदाहरण 4 : $3x^2+5x-4$ आणि $6+6x^2$ची बेरीज करा.

उकल :

क्र.	पायऱ्या (टप्पे)	प्रक्रिया
1	आवश्यकता असल्यास बैजिक राशी प्रमाणित रूपात लिहा.	(ii) $6+6x^2=6x^2+6$
2	एक बैजिकराशी दुसऱ्या बैजिक राशीखाली अशाप्रकारे लिहा की सरूप पदे एकाखाली एक येतील.	$3x^2+5x-4$ $6x^2\qquad+6$
3.	सरूप पदांची उभी बेरीज करा आणि त्या स्तंभाखाली लिहा.	$3x^2+5x-4$ $6x^2\qquad+6$ $9x^2+5x+2$

उदाहरण 5 : $5x^2+9x+6, 4x+3x^2-8$ आणि $5-6x$ ची बेरीज करा

उकल : पायरी 1 :

$$5x^2+9x+6 = 5x^2+9x+6$$
$$4x+3x^2-8 = 3x^2+4x-8$$
$$5-6x = -6x+5$$

पायरी 2 :

$$\begin{array}{r}5x^2+9x+6\\3x^2+4x-8\\-6x+5\end{array}$$

पायरी 3 :

$$\begin{array}{r}5x^2+9x+6\\3x^2+4x-8\\-6x+5\\\hline 8x^2+7x+3\end{array}$$

(ii) ओळीने किंवा आडवी मांडणी पध्दत.

उदाहरण 6 : $3x^2 + 5x - 4$ आणि $6 + 6x^2$ ची बेरीज करा

अ.क्र.	पायऱ्या (टप्पे)	प्रक्रिया
1	दिलेल्या बैजिक राशी लिहा. दोन राशीदरम्यान बेरजेचे चिन्ह लिहा.	$3x^2 + 5x - 4 + 6 + 6x^2$
2	सरूप पदे एकत्र घेऊन त्यांचा गट तयार करून मांडणी करा.	$(3x^2 + 6x^2) + (5x) + (-4 + 6)$
3	सहगुणकाला सरळरूप दया.	$(3+6)\, x^2 + 5x + 2$
4	परिमाण म्हणून आलेली राशी प्रमाणित रूपात लिहा.	$9x^2 + 5x + 2$

सरावासाठी

1. खालिल राशींच्या बेरजा करा.

(i) $x - 2y,\ 3x + 4y$

(ii) $4m^2 - 7n^2 + 5mn,\ 3m^2 + 5m^2 - 2mn$

(iii) $3a - 4b,\ 5c - 7a + 2b$

10.9.2 बैजिक राशीची वजाबाकी

10.9.2(a) राशीची विरूध्द राशी.

जर आपण 9 ही धन संख्या घेतली तर तेथे –9 ही संख्या अस्तित्वात असते.जसे $9 + (-9) = 0$.

येथे आपण असे म्हणतो की –9 ही 9 ची विरूध्द राशी आहे. आणि 9 ही – 9 ची विरूध्द राशी आहे.

अशाप्रकारे प्रत्येक धन संख्येची एक ऋण संख्या असते. आणि त्यांची बेरीज शून्य असते. या दोन संख्यांना एकमेकींच्या विरूध्द राशी असे म्हणतात.

बैजिक राशीसाठी सुध्दा हे खरे आहे काय? प्रत्येक बैजिक राशीची विरूध्द राशी असते ?

जर असेल तर '$3x$' ची विरूध्द राशी कोणती ?

'$3x$' विरूध्द राशी '$-3x$' जसे $3x + (-3x) = 0$

म्हणून, '$-3x$' राशीची विरूद्ध राशी '$3x$' आणि '$3x$' राशीची विरूद्ध राशी '$-3x$'.

अशाप्रकारे प्रत्येक बैजिक राशीची आणखी दुसरी बैजिक राशी अस्तित्वात असते आणि त्यांची बेरीज शुन्य असते. त्या दोन राशींना एकमेकीच्या विरूध्द असे म्हणतात.

उदाहरण 6 : ($6x^2 – 4x + 5$) ची विरूद्ध राशी शोधा.

उकल : $6x^2 – 4x + 5$ ची विरूद्ध राशी $= – (6x^2 – 4x + 5) = –6x^2 + 4x – 5$

10.9.2(b) वजाबाकी

समजा A आणि B या दोन राशी आहेत. म्हणजेच $A – B = A + (–B)$

म्हणजेच A मधून B ची विरूद्ध राशी मध्ये मिळविणे.

आता आपण बैजीक राशीच्या उभ्या मांडणीतील आणि आडव्या मांडणीतील वजाबाकी करूया.

(i) स्तंभ किंवा उभी मांडणी पद्धत

उदाहरण 7 : $3a + 4b – 2c$ मधून $3c + 6a – 2b$ वजा करा

उकल :

क्र.	पायऱ्या (टप्पे)	प्रक्रिया
1	दोन्ही राशी गरज वाटल्यास प्रमाणित रूपात लिहा	$3c+6a-2b=6a-2b+3c$ $3a+4b-2c=3a+4b-2c$
2	दिलेल्या राशी एकाखाली एक अशाप्रकारे लिहा की वजा करावयाची राशी दुसऱ्या ओळीत येईल तसेच सरूप पदे एकाखाली एक लिहा.	$6a-2b+3c$ $3a+4b-2c$
3	दिलेल्या राशीची विरूघ्द राशी मिळण्यासाठी दुसऱ्या ओळीतील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदाचे चिन्ह बदलून लिहा.	$6a-2b+3c$ $3a+4b-2c$ $-\quad -\quad +$
4	उभ्या मांडणीप्रमाणे सरूप पदांची बेरीज करा. आणि आलेले उत्तर संबंधित स्तंभाखाली लिहा.	$6a-2b+3c$ $3a+4b-2c$ $-\quad -\quad +$ $3a-6b+5c$

उदाहरण 8 : $4+3m^2$ मधून $4m^2+7m-3$ वजा करा.

उकल : पायरी 1: $4m^2+7m-3 = 4m^2+7m-3$

$4+3m^2 = 3m^2+4$

पायरी 2: $4m^2+7m-3$

$3m^2 \quad +4$

पायरी 3: $4m^2 + 7m - 3$

$3m^2 \quad + 4$

$- \quad -$

पायरी 4: $4m^2 + 7m - 3$

$3m^2 \quad + 4$

$- \quad -$

$m^2 + 7m - 7$

(ii) आडवी मांडणी पद्धत

उदाहरण 9 : $3a + 4b - 2c$ मधून $3c + 6a - 2b$ वजा करा

उकल :

क्र.	पायऱ्या	प्रक्रिया
1	बैजिक राशी एका ओळीत लिहून त्यामधून वजा करावायाची बैजिक राशी - चिन्ह देऊन कंसात लिहावी.	$3c+6a-2b-(3a+4b-2c)$
2	कंसातील सर्व संख्याचे चिन्ह बदलून लिहा	$3c+6a-2b-3a-4b+2c$
3	सारख्या / समान पदाचे गट करा आणि बेरीज/वजाबाकी करा.	$(3c+2c)+(6a-3a)+(-2b-4b)$ $=5c+3a-6b$
4	प्रमाणित रूपात लिहा	$3a-6b+5c$

उदाहरण 10 : $3m^3 + 4$ मधून $6m^3 + 4m^2 + 7m - 3$ वजा करा

उकल … पायरी 1: $6m^3 + 4m^2 + 7m - 3 - (3m^3 + 4)$

पायरी 2: $6m^3 + 4m^2 + 7m - 3 - 3m^3 - 4$

पायरी 3: $(6m^3 - 3m^3) + 4m^2 + 7m - 3 - 4$

$= 3m^3 + 4m^2 + 7m - 7$

पायरी 4: $3m^3 + 4m^2 + 7m - 7$

स्वाध्याय- 4

1. खालील बैजिक राशींची आडव्या आणि उभ्या मांडणीत बेरीज करा. दोन्ही पध्दतीने तुम्हाला सारखेच उत्तर मिळते काय?

   (i) $x^2 - 2xy + 3y^2$; $5y^2 + 3xy - 6x^2$

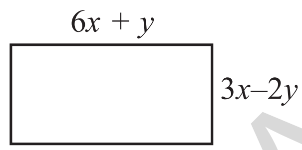
   (ii) $4a^2 + 5b^2 + 6ab$; $3ab$; $6a^2 - 2b^2$; $4b^2 - 5ab$

   (iii) $2x + 9y - 7z$; $3y + z + 3x$; $2x - 4y - z$

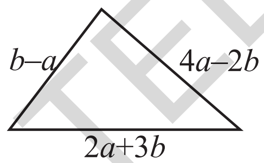
   (iv) $2x^2 - 6x + 3$; $-3x^2 - x - 4$; $1 + 2x - 3x^2$

2. सरळरूप द्या : $2x^2 + 5x - 1 + 8x + x^2 + 7 - 6x + 3 - 3x^2$

3. खालील आयताची परिमिती लिहा.



4. $2a + 3b$, $b–a$, $4a–2b$ बाजू असलेल्या त्रिकोणाची परिमिती शोधा.



5. पहिल्या राशीतून दुसरी राशी वजा करा.

   (i) $2a+b$, $a–b$

   (ii) $x+2y+z$, $–x–y–3z$

   (iii) $3a^2–8ab–2b^2$, $3a^2–4ab+6b^2$

   (iv) $4pq–6p^2–2q^2$, $9p^2$

   (v) $7–2x–3x^2$, $2x^2–5x–3$

   (vi) $5x^2–3xy–7y^2$, $3x^2–xy–2y^2$

   (vii) $6m^3+4m^2+7m–3$, $3m^3+4$

6. $x^2–5xy+2y^2$ आणि $y^2–2xy–3x^2$ यांच्या बेरजेतून
   $6x^2–8xy–y^2$ आणि $2xy–2y^2–x^2$ यांची बेरीज वजा करा

7. $1+2x–3x^2$ मध्ये किती मिळविले असता $x^2–x–1$ मिळेल?

8. $3x^2 - 4y^2 + 5xy + 20$ मधून काय वजा केले असता $-x^2 - y^2 + 6xy + 20$ मिळेल

9. 3 राशींची बेरीज $8 + 13a + 7a^2$. आहे त्यापैकी दोन संख्या $2a^2 + 3a + 2$ आणि $3a^2 - 4a + 1$. आहे तर तिसरी राशी शोधा.

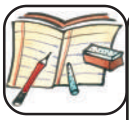
10. जर $A = 4x^2 + y^2 - 6xy;$

$B = 3y^2 + 12x^2 + 8xy;$

$C = 6x^2 + 8y^2 + 6xy$

शोधा (i) $A + B + C$ (ii) $(A - B) - C$

(iii) $2A + B$ (iv) $A - 3B$



पाठ्यावलोकन :

- बैजीक राशी ही एक पद किंवा पदांचा समूह असून + बेरजेने किंवा – वजाबाकीच्या चिन्हाने जोडलेली असते.
- जर राशीतील प्रत्येक पद स्थिर पद असेल तर त्या राशीला संख्यात्मक राशी असे म्हणतात जर त्या राशीत कमीत कमी एक पदबैजिक पद असेल तर त्या राशीला बैजिक राशी म्हणतात.
- ज्या बैजिक राशीत एकच पद असते तिला एकपदी असे म्हणतात ज्या राशीत दोन भिन्नरूप पदे असतात त्यास द्विपदी असे म्हणतात.ज्या बैजिक राशीत तीन भिन्नरूप असे असतात. व्यास त्रिपदी असे म्हणतात ज्या बैजिक राशीत तीनपेक्षा जास्त भिन्नरूप पदे असतात. तिला बहुपदी असे म्हणतात.
- एखाद्या एकपदीमधील चलांच्या सर्व धारकांची बेरजेला त्या एकपदीच्या घात असे म्हणतात.
- कोणत्याही स्थिर पदाचा घात 0 असतो.
- राशीमधील सर्वात जास्त घात असलेल्या पदाला त्या बैजिक राशीचा घात असे म्हणतात.
- जर एखादया राशीतील दोन पदे सरूप नसतील तर ती राशी सरळरूप आहे.
- राशीतील पदांची अशा प्रकारे पुनर्मांडणी केली की, त्या राशीतील पदांचे घात उतरत्या क्रमाने येतील तेव्हा ती राशी प्रमाणित रूपात असे म्हणतात.
- दोन किंवा अधिक सरूप राशींची बेरीज ही सरू राशीच येते आणि सरूप पदाची बेरीज करतांना त्या पदांच्या सहगुणकांची बेरीज करून त्यापुढे चल लिहितात.
- दोन सरूप राशींमधील फरक हा सरूप राशीच असते आणि दोन सरूप पदांची वजाबाकी करतांना त्या पदांच्या सहगुणकांची वजाबाकीकरून त्यापुढे चल लिहितात.

घातांक

11

11.0 प्रस्तावना

भारतीय जनगणना 2011 नूसार भारताची लोसंख्या 1,20,00,00,000 आहे.

सुर्य व पृथ्वीतील जवळपास 15,00,00,000 किमी आहे.

प्रकाशाचा वेग 30,00,00,000 मि/सें आहे एकासेकंदात प्रकाश 30,00,00,000 मिटर्स प्रेरित होतो.

2011 च्या जनगणनेनुसार आंध्रप्रदेशाची लोकसंख्या 8,50,00,000 आहे. या ठिकाणी सर्वच संख्या मोठयात मोठ्या अंकानी दाखविल्या आहेत. त्या आपणास वाचावयास कठिण वाठतातत्र जास्त अंक लिहील्यावर समजू शकत नाही. म्हणून हे अंक सोप्या पद्धतीने लिहावे लागेल. या प्रकरणात आपण घातांक व घातांकाचे नियम शिकणार आहो.

11.1 घातांकाची रचना किंवा स्वरूप

खालील बेरजेचा विचार करूया

4 + 4 + 4 + 4 + 4

5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5

7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7

त्याच त्या संख्येची बेरिज दाखविण्यासाठी आपण गुणाकारात रूपात 6ह्व4, 8ह्व5 आणि 9ह्व7 असे लिहीतो. आता हया पुर्नवर्ती संख्याचा गुणाकार सोप्या पध्दतीने मांडु शकतो. काय ?

क्रमानुगतपणे गुणाकाराचा आपण सर्वात सोप्या पद्धतीने उत्तर देऊ शकतो का?

खालील सोडविलेले उदाहरण पाहुत.

2011 जनगणने नूसार बिहारची लोकसंख्या 10,00,00,000 आहे.

येथे 10 चा गुणाकार 8 वेळेस करूया त्र 10ह्व10ह्व10ह्व10ह्व10ह्व10ह्व10ह्व10

म्हणून बिहारची लोकसंख्या 10^{8} येथे 10 पाया व 8 हा त्याचा घात आहे. यालाच घातांक स्वरूप म्हणतात. त्याचे वाचन दहाचा घात आठ असे वाचावे.

माध्यमातून प्रकाशचा वेग प्रतिसेकंदास 30,00,00,000 मि/से. आहे तो.3ह्व10^{8} मि/सें असा लिहीतात. व त्याचे वाचन दहाचा घात आठ असे वाचतात. 10 पाया व 8 घात आहे.

सूर्य व पृथ्वी यातील अंतर अंदाजे 15,00,00,000 कि.मी आहे. तो 15×10^7 कि.मी.असा लिहीतात येथे 10 पाया व 7 घात आहे.

2011 च्या जनगणने नूसार आंध्रप्रदेशाची लोकसंख्या 8,50,00,000 आहे. ती 85ह्न10^6 अशी लिहीतात. 10^6 यालाच 10 चा घात 6 किंवा 10 पाया व 6 घात असे वाचतात.

घातांक असा पण लिहू शकतो.

$$36584 = (3\times10000) + (6\times1000) + (5\times100) + (8\times10) + (4\times1)$$
$$= (3\times10^4) + (6\times10^3) + (5\times10^2) + (8\times10^1) + (4\times1)$$

सरावासाठी

1. घातांक रूपात मांडा

   (i) पृथ्वीचा एकुण पृष्ठफळ 510,000,000 चौरस कि.मी.

   (ii) राजस्थानची लोकसंख्या 7,00,00,000

   (iii) पृथ्वीचे वय अंदाजे, 4550 दसलक्ष वर्षे आहे.

   (iv) 1000 km मिटर मध्ये रूपांतर

2. (i) 48951 (ii) 89325 घातांकरूपांत करा.

11.1.1 दुसऱ्या पायांचा घातांक

आपण 10 चा घात शिकलोत पण इतर संख्याचा घात कसा लिहावा.

उदा. $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

या ठिकाणी 3 पाया व 4 घात

त्याचप्रमाणे, $125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

या ठिकाणी 5 पाया व 3 घात

उदाहरण **1:** मोठी संख्या कोणती – 3^4 किंवा 4^3 ?

$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

$81 > 64$

म्हणून, $3^4 > 4^3$

सरावासाठी

1. $3^2 \neq 2^3$ हे दाखवा.

2. घात व पाया सांगून खालील संख्याघात रूपात मांडा आणि ती कशी वाचतात ते लिहा.

   (i) 32 (ii) 64 (iii) 256 (iv) 243 (v) 48

वर्ग आणि घन

जेव्हा एखादी संख्या 2 कि 3 च्या घातरूपात मांडतात त्याला काय म्हणावे.

$10^2 = 10 \times 10$ याचे वाचन **10 चा घात 2** किंवा **10 चा वर्ग** असे वाचतात.

त्याचप्रमाणे, $4^2 = 4 \times 4$ याचे वाचन **4 चा घात 2** किंवा **4 चा वर्ग** असे वाचतात.

$10 \times 10 \times 10 = 10^3$ याचे वाचन **10 चा घात 3** किंवा **10 चा घन** असे वाचतात.

त्याचप्रमाणे, $6 \times 6 \times 6 = 6^3$ याचे वाचन **6 चा घात 3** किंवा **6 चा घन** असे वाचतात.

सामान्यपणे आपण कोणत्या घन संख्येचे (‘a’) चे रूपांतर लिहू शकतो.

$a \times a$ $= a^2$ (याचे वाचन a चा घात 2 किंवा a चा वर्ग असे वाचतात.)

$a \times a \times a$ $= a^3$ (याचे वाचन a चा घात 3 किंवा a चा घन असे वाचतात.)

$a \times a \times a \times a$ $= a^4$ (याचे वाचन a चा घात 4 असे वाचतात.)

__________ $= a^5$ (____________________________)

__________ $= a^6$ (____________________________) इत्यादी

यावरून

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times$..................... 'm' वेळा = a^m

जेथे 'a' हा पाया आणि 'm' हा घातांक आहे

सरावासाठी

1. घात रूपांत लिहा.

   (i) p^7 (ii) l^4 (iii) s^9 (iv) d^6 (v) z^5

2. घात रूपांत लिहा.

   (i) $a \times a \times a \times$ .... 'l' वेळा

   (ii) $5 \times 5 \times 5 \times 5$.................... '$n$' वेळा

   (iii) $q \times q \times q \times q \times q$ .... 15 वेळा

   (iv) $r \times r \times r \times$ .... 'b' वेळा

11.2 अविभाज्य अवयवचा वापर करून घातांक लिहीणे.

आता आपण पारंपरिक अवयव पद्धतीने घातांकाचा वापर करूया.

(i) 432 (ii) 450

उत्तर (i): $432 = 2 \times 216$

$= 2 \times 2 \times 108$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= 2^4 \times 3^3$

2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

म्हणून, $432 = 2^4 \times 3^3$

(ii) 450 $= 2 \times 225$

$= 2 \times 3 \times 75$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 25$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 2 \times 3^2 \times 5^2$

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

म्हणून, $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

सरावासाठी

अविभाज्य अवयवच्या वापर करून घात रूपात मांडा.

(i) 2500 (ii) 1296 (iii) 8000 (iv) 6300

स्वाध्याय - 1

1. प्रत्येक घातांकाची पाया व घात लिहा.

(i) 3^4 (ii) $(7x)^2$ (iii) $(5ab)^3$ (iv) $(4y)^5$

2. प्रत्येक स्पष्टीकरणाला घातांक स्वरूपात मांडा.

(i) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

(ii) $3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

(iii) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

3. खालील संख्या अविभाज्य अवयवाचा वापर करून घातांकात लिहा.

(i) 288 (ii) 1250 (iii) 2250 (iv) 3600 (v) 2400

4. खालील दिलेल्या जोडीतील लहान मोठेपणा ठरवा.

(i) 2^3 or 3^2 (ii) 5^3 or 3^5 (iii) 2^8 or 8^2

5. जर $a = 3, b = 2$ तर किंमती काढा. (i) $a^b + b^a$ (ii) $a^a + b^b$ (iii) $(a + b)^b$ (iv) $(a-b)^a$

11.3 घातांकाचे नियम

गुणाकारात घातांकाचे नियम माहित असल्यास आपणास सहज ते सोडवता येतील याचा विचार करू

11.3.1 समान पाया असणाऱ्या संख्याचा गुणाकार

उदाहरण 2 : $2^4 \times 2^3$

उत्तर : $2^4 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2 \times 2 \times 2)}_{4 \text{ वेळा}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3 \text{ वेळा}}$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$ आणि 2^{4+3} हे सारखेच असते. (जसे $4 + 3 = 7$)

म्हणून, $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3}$

उदाहरण 3: $5^2 \times 5^3$

उत्तर : $5^2 \times 5^3 = \underbrace{(5 \times 5)}_{2 \text{ वेळा}} \times \underbrace{(5 \times 5 \times 5)}_{3 \text{ वेळा}}$

$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^5$ आणि 5^{2+3} हे सारखेच असते. (जसे $2 + 3 = 5$)

म्हणून, $5^2 \times 5^3 = 5^{2+3}$

सरावासाठी

किंमती काढा 2^4, 2^3 आणि 2^7

पडताळा करा $2^4 \times 2^3 = 2^7$

5^2, 5^3 आणि 5^5 यांची किंमत काढून $5^2 \times 5^3 = 5^5$ याचा पडताळा करा.

उदाहरण 4 : $a^4 \times a^5$

उत्तर : $a^4 \times a^5 = (a \times a \times a \times a) \times (a \times a \times a \times a \times a)$

$= (a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a)$

$= a^9$ वेळाह आणि हे a^{4+5} च्या समान आहे. (जसे $4 + 5 = 9$)

म्हणून, $a^4 \times a^5 = a^{4+5}$

वरील अनुमानावरून

$a^m \times a^n$ = ($a \times a \times a$ ....'m' वेळेस) × ($a \times a \times a \times$ ....'n' वेळेस)= a^{m+n}

> **शून्य नसलेल्या कोणत्या पुर्णांक '*a*' संख्याचा**
> **'*m*' आणि '*n*' घातांक $a^m \times a^n = a^{m+n}$**

सरावासाठी

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ या सुत्राचा वापर करून सोडवा.

(i) $3^{11} \times 3^9$ (ii) $p^5 \times p^8$

2. 'k' ही या संख्येचा शून्य नसलेल्या पूर्णांक संख्या '?' चिन्हाच्या ठिकाणी शोधा.

(i) $k^3 \times k^4 = k^?$ (ii) $k^{15} \times k^? = k^{31}$

11.3.2 घातांकाचा घात

उदाहरण 5 : गृहीत $(3^2)^3$

उत्तर : येथे '3^2' हा पाया '3' हा घातांक आहे.

$(3^2)^3 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$= 3^{2+2+2}$ (समान पायाच्या घाताचा गुणाकार)

$= 3^6$ हे असेही लिहिता येते $3^{2\times3}$ (जसे $2 \times 3 = 6$)

म्हणून, $(3^2)^3 = 3^{2\times3}$

सरावासाठी

3^2 चा घन 3^2 पडताळा करा; $(3^2)^3 = 3^6$?

उदाहरण 6 : गृहीत $(4^5)^3$

उत्तर : $(4^5)^3 = 4^5 \times 4^5 \times 4^5$

$= 4^{5+5+5}$ (समान पायाच्या गुणाकारावरून)

$= 4^{15}$ हे असेही लिहिता येते $4^{5\times3}$ (जसे $5 \times 3 = 15$)

म्हणून, $(4^5)^3 = 4^{5\times3}$

उदाहरण 7 : $(a^m)^4$

उत्तर : $(a^m)^4 = a^m \times a^m \times a^m \times a^m$

$= a^{m+m+m+m}$ (समान पायाच्या गुणाकार)

$= a^{4m}$ हे असेही लिहिता येते $a^{m\times4}$ (जसे $4 \times m = 4m$)

म्हणून, $(a^m)^4 = a^{m\times4}$

यावरून असे म्हणता येईल $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m$ ---- n वेळा $= a^{m+m+m+ \ldots\ldots n}$ वेळा $= a^{mn}$

कोणती शुन्य नसलेली पुर्णांक संख्या

शून्य नसलेल्या कोणत्याही पूर्णांक संख्येचा ***'m'*** आणि ***'n'*** घातांक $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$

11.3.3 घातांकाचा गुणाकार

उदाहरण. 8 : $3^5 \times 4^5$ विचारात घ्या.

उत्तर : येथे 3^5 आणि 4^5 हे 5 घात परंतु वेगळे पाया असणारी संख्या

$3^5 \times 4^5 = (3\times3\times3\times3\times3) \times (4\times4\times4\times4\times4)$

$= (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4) \times (3\times4)$

$= (3\times4)^5$

म्हणून $3^5 \times 4^5 = (3 \times 4)^5$

उदाहरण 9: $4^4 \times 5^4$ सोडवा.

उत्तर : येथे 4^4 आणि 5^4 हे 4 घात परंतु वेगळे पाया असणारी संख्या

$4^4 \times 5^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5)$

$= (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$

$= (4 \times 5)\times (4 \times 5) \times (4 \times 5) \times (4 \times 5)$

$= (4 \times 5)^4$

म्हणून, $4^4 \times 5^4 = (4 \times 5)^4$

उदाहरण 10 : $p^7 \times q^7$ चा विचार करा.

उत्तर : येथे p^7 आणि q^7 समान घात 7 परंतू वेगळे पाया असणारे

$$p^7 \times q^7 = (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p) \times (q \times q \times q \times q \times q \times q \times q)$$
$$= (p \times p \times p \times p \times p \times p \times p \times q \times q \times q \times q \times q \times q \times q)$$
$$= (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q) \times (p \times q)$$
$$= (p \times q)^7$$

म्हणून, $p^7 \times q^7 = (p \times q)^7$

यावरून असे म्हणता येईल $a^m \times b^m = (a \times b)^m = (ab)^m$

'a', 'b' ही कोणतेही शुन्य नसलेल्या पूर्णांक संख्या 'm'

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

सरावासाठी

$a^m \times b^m = (a\,b)^m$ या सुत्राचा वापर करून सोडवा.

(i) $(2 \times 3)^4$ (ii) $x^p \times y^p$ (iii) $a^8 \times b^8$ (iv) $(5\times4)^{11}$

11.3.4 घातांक स्वरुपाचे विभाजन

घातांकाच्या विभाजनापूर्वी ऋण संख्येचे घात बघू या.

11.3.4(a) ऋण घातांक

खालील संख्येचे निरीक्षण करा.

2^5	=	32	3^5	=	243
2^4	=	16	3^4	=	81
2^3	=	8	3^3	=	27
2^2	=	4	3^2	=	9
2^1	=	2	3^1	=	3
2^0	=	1	3^0	=	1
2^{-1}	=		3^{-1}	=	
(क्लृप्ती : अर्धे)			(क्लृप्ती : एक तृतीयांश)		
2^{-2}	=		3^{-2}	=	

32 चा 16 वा भाग किती ?
2^5 आणि 2^4 मधील फरक किती ?
प्रत्येक घात पूर्वी पेक्षा प्रत्येक वेळेस 1/2 ने कमी झाला.
यावरून आपणास असे म्हणता येईल की,

$2^{-1} = \frac{1}{2}$ आणि $2^{-2} = \frac{1}{4}$ आणि

$3^{-1} = \frac{1}{3}$ आणि $3^{-2} = \frac{1}{9}$

आणखी काही, आपणास असे म्हणता येईल की, $2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$

जसे, $3^{-1} = \frac{1}{3}$ आणि $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$

कोणतेही '*a*' द शून्य नसलेले पूर्णांक

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

सरावासाठी

1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ चा वापर करून धन घातांक लिहा.

(i) x^{-7} (ii) a^{-5} (iii) 7^{-5} (iv) 9^{-6}

11.3.4(b) शून्य घातांक

आता आपण पाहीलत की,

$2^0 = 1$

$3^0 = 1$

जसे

$4^0 = 1$

$5^0 = 1$ आणि

'a' ही शून्य पूर्णांक नसलेले

$a^0 = 1$

11.3.4(c) समान पाया असलेल्या घातांकाचे विभाजन

उदाहरण 11 : $\frac{7^7}{7^3}$ चा विचार करा

उत्तर : $\frac{7^7}{7^3} = \frac{7\times7\times7\times7\times\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}}{\cancel{7}\times\cancel{7}\times\cancel{7}} = 7\times7\times7\times7$

$= 7^4$ च्या समान 7^{7-3} (जसे $7-3=4$)

म्हणून, $\frac{7^7}{7^3} = 7^{7-3}$

उदाहरण 12: $\frac{3^8}{3^3}$ चा विचार करा

उत्तर : $\frac{3^8}{3^3} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}} = 3\times3\times3\times3\times3$

$= 3^5$ च्या समान. 3^{8-3} (जसे $8-3=5$)

म्हणून, $\frac{3^8}{3^3} = 3^{8-3}$

उदाहरण 13: $\frac{5^5}{5^8}$ चा विचार करा.

उत्तर : $\frac{5^5}{5^8} = \frac{\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}}{5\times5\times5\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}\times\cancel{5}} = \frac{1}{5\times5\times5} = \frac{1}{5^3}$

$\frac{1}{5^3}$ च्या समान. $\frac{1}{5^{8-5}}$ (जसे $8-5=3$)

म्हणून $\frac{5^5}{5^8} = \frac{1}{5^{8-5}}$

उदाहरण 14: $\frac{a^2}{a^7}$ चा विचार करा.

उत्तर : $\frac{a^2}{a^7} = \frac{\cancel{a}\times\cancel{a}}{a\times a\times a\times a\times a\times\cancel{a}\times\cancel{a}} = \frac{1}{a\times a\times a\times a\times a}$

$= \frac{1}{a^5}$ च्या समान. $\frac{1}{a^{7-2}}$ (जसे $7-2=5$)

म्हणून, $\dfrac{a^2}{a^7} = \dfrac{1}{a^{7-2}}$

यावरून असे म्हणता येईल.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ if } m > n \text{ and } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ if } m<n$$

शुन्य नसलेला पुर्णांक

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{if } m > n \quad \text{and} \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{if } n > m$$

काय घडेल जर $m = n$? तुमचे उत्तर लिहा.

उदाहरण 15 : $\dfrac{4^3}{4^3}$ विचारात घा.

उत्तर : $\dfrac{4^3}{4^3} = \dfrac{4 \times 4 \times 4}{4 \times 4 \times 4} = \dfrac{1}{1} = 1 \quad \ldots\ldots (1)$

जर आपणास माहीत आहे $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\therefore \dfrac{4^3}{4^3} = 4^{3-3} = 4^0 = 1$ from (1)

जसे शोधा $\dfrac{7^4}{7^4} = ?$

वरील अनुमानावरून

विचारात द्या $\dfrac{a^4}{a^4} = \dfrac{a \times a \times a \times a}{a \times a \times a \times a} = 1$

परंतु $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

आपणाकडे $\dfrac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0 = 1$

येथे 'a' ही कोणतेही 0 नसलेली संख्या.

$a^0 = 1$.

m, n (m = n)

m = n $\quad \boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = 1}$

सरावासाठी

1. a^{m-n} or $\dfrac{1}{a^{n-m}}$ या वरून सोडवा.

   (i) $\dfrac{13^8}{13^5}$ (ii) $\dfrac{3^4}{3^{14}}$

2. रिकाम्या जागा पूर्ण करा.

   Ex : $\dfrac{8^8}{8^3} = 8^{\boxed{8-3}} = 8^{\boxed{5}}$

   (i) $\dfrac{12^{12}}{12^7} = 12^{\Box} = 12^{\Box}$ (ii) $\dfrac{a^{18}}{a^{\Box}} = a^{\Box} = a^{\boxed{10}}$

11.3.4(c) समान घातांकाचा भागाकार.

उदाहरण 16: $\left(\dfrac{7}{4}\right)^5$ विचारात घ्या.

उत्तर :

$$\left(\frac{7}{4}\right)^5 = \frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}\times\frac{7}{4}$$

$$= \frac{7\times7\times7\times7\times7}{4\times4\times4\times4\times4}$$

$$= \frac{7^5}{4^5}$$ (घातांकाच्या व्याख्येवरून)

म्हणून, $\left(\dfrac{7}{4}\right)^5 = \dfrac{7^5}{4^5}$

उदाहरण. 17: $\left(\dfrac{p}{q}\right)^6$ विचारात घ्या.

उत्तर :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^6 = \left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)\times\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$= \frac{p\times p\times p\times p\times p\times p}{q\times q\times q\times q\times q\times q}$$

$$= \frac{p^6}{q^6} \qquad \text{(घातांकाच्या सुत्रावरून)}$$

म्हणून, $\left(\frac{p}{q}\right)^6 = \frac{p^6}{q^6}$

यावरून;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times a \text{ 'm' times}}{b \times b \times b \times b \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times b \text{ 'm' times}} = \frac{a^m}{b^m}$$

a, b आणि 'm' 0 नसलेल्या पुर्णांक $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

सरावासाठी

1. पूर्ण करा.

(i) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{\boxed{}}$ (ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\boxed{}} = \frac{3^5}{2^5}$

(iii) $\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ (iv) $\left(\frac{x}{y}\right)^{11} = \frac{\boxed{}}{y^{11}}$

11.3.5 ऋण पाया असलेले घातांक.

उदाहरण 18 : सोडवा $(1)^4, (1)^5, (1)^7, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, (-1)^5$

उत्तर : $(1)^4 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(1)^7 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$

$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

सोडवलेल्या उदाहरणावरून वरून

(i) 1 वाढल्यावर घात 1 ने वाढते

(ii) (-1) वाढल्यास विषम घात असल्यास (-1) सम असल्यास (+1)

म्हणून ; $(-a)^m = -a^m$ जर 'm' विषम आहे

$(-a)^m = a^m$ जर 'm' सम आहे

आणखी काही उदाहरण

$(-3)^4 = (-3)\ (-3)\ (-3)\ (-3) = 81$

$(-a)^4 = (-a)\ (-a)\ (-a)\ (-a) = a^4$

$$(-a)^{-3} = \frac{1}{(-a)} \times \frac{1}{(-a)} \times \frac{1}{(-a)} = \frac{1}{-a^3} = \frac{-1}{a^3}$$

उदाहरण 19 : सोडवा. $\frac{-27}{125}$ घातांक पद्धती

उत्तर : $-27 = (-3)\ (-3)\ (-3) = (-3)^3$

$125 = 5 \times 5 \times 5 = (5)^3$

म्हणून, $\frac{-27}{125} = \frac{(-3)^3}{(5)^3}$ as $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

म्हणून, $\frac{-27}{125} = \left(\frac{-3}{5}\right)^3$

सरावासाठी

1. घातांकात लिहा.

(i) $(a)^{-5}$ (ii) $(-a)^4$ (iii) $(-7)^{-5}$ (iv) $(-a)^m$

2. घातांकात लिहा.

(i) $(-3) \times (-3) \times (-3)$ (ii) $(-b) \times (-b) \times (-b) \times (-b)$

(iii) $\frac{1}{(-2)} \times \frac{1}{(-2)} \times \frac{1}{(-2)}$ ...... 'm' वेळा

स्वाध्याय - 2

1. घाताकाच्या नियमावरून सोडवा.

(i) $2^{10} \times 2^4$ (ii) $(3^2) \times (3^2)^4$ (iii) $\frac{5^7}{5^2}$

(iv) $9^2 \times 9^{18} \times 9^{10}$ (v) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^8$ (vi) $(-3)^3 \times (-3)^{10} \times (-3)^7$

(vii) $(3^2)^2$ (viii) $2^4 \times 3^4$ (ix) $2^{4a} \times 2^{5a}$

(x) $(10^2)^3$ (xi) $\left[\left(\frac{-5}{6}\right)^2\right]^5$ (xii) $2^{3a+7} \times 2^{7a+3}$

(xiii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ (xiv) $(-3)^3 \times (-5)^3$ (xv) $\frac{(-4)^6}{(-4)^3}$

(xvi) $\frac{9^7}{9^{15}}$ (xvii) $\frac{(-6)^5}{(-6)^9}$ (xiii) $(-7)^7 \times (-7)^8$

(xix) $(-6^4)^4$ (xx) $a^x \times a^y \times a^z$

2. 3^{-4} ला कोणत्या संख्येने गुणल्यास गुणाकार 729 होईल.

3. जर $5^6 \times 5^{2x} = 5^{10}$, तर x माहित करा.

4. सोडवा $2^0 + 3^0$

5. सोडवा $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^a \times \left(\frac{x^b}{x^a}\right)^a \times \left(\frac{x^a}{x^a}\right)^b$

6. सत्य/ असत्य सांगून उत्तराचा ताळा करा.

(i) $100 \times 10^{11} = 10^{13}$ (ii) $3^2 \times 4^3 = 12^5$ (iii)) $5^0 = (100000)^0$

(iv) $4^3 = 8^2$ (v) $2^3 > 3^2$ (vi) $(-2)^4 > (-3)^4$

(vii) $(-2)^5 > (-3)^5$

प्रकल्प कार्य

कोणत्याही दहा कुंटुबाच्या वार्षिक उत्पन्नाची माहिती गोळा करुन त्या संख्येला जवळच्या हजार/ दहा हजार / लाख मध्ये पुर्ण करुन लिहा आणि त्याला घातकांच्या स्वरुपात लिहा.

11.3.6 मोठ्या संख्या योग्य रूपात मांडा

पृथ्वीचे वस्तुमान 5976×10^{21} किग्र आहे.

अवकाशातील अंतर 946×10^{15} कि.मी. आहे.

अशा संख्यांना आपण गुणक किंवा घातांक रूपात मांडू शकतो जसे की,

पृथ्वीचे वस्तूमान 5.976×10^{24} कि.ग्र आहे.

अवकाशातील अंतर 9.46×10^{17} कि.मी आहे

म्हणून वैज्ञानिक दृष्टीकोनातून आपण संख्याचा गुणाकार 10 व छेदअंशात 1 व 10 या मोठया संख्येने दाखवू शकतो.

स्वाध्याय 3

खालील विधान योग्य रूपात मांडा

(i) पृथ्वी व चंद्रातील अंतर अंदाजे 3,84,00,000 कि.मी

(ii) अवकाशाचे अंदाजे वयमान 12,000,000,000 वर्षे

(iii) सूर्य व अवकाशातील अंतर 300,000,000,000,00,000 मी

(iv) पृथ्वी समुद्रापेक्षा 1,353,000,000 घनमी^{3} आहे

पाठ्यावलोकन

- जास्त अंकाची संख्या आपण सहज वाचू शकतो,ती घातांक रूपात लिहू शकतो.
- $10{,}000 = 10^4$ त्याचे वाचन 10 चा घात 4 $243 = 3^5$ त्याचे वाचन 3 चा घात 5

  $64 = 2^6$ (त्याचे वाचन 2 चा घात 6). या उदाहरणात 10, 3, 2 अनुक्रमे पाया असून 4,5,6 हा घातांक आहेत.
- घातांकाचे नियम : कोणतीही शुन्येतर संख्या 'a', 'b', 'm', 'n'

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$

  (iv) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (v) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ जर $m > n$

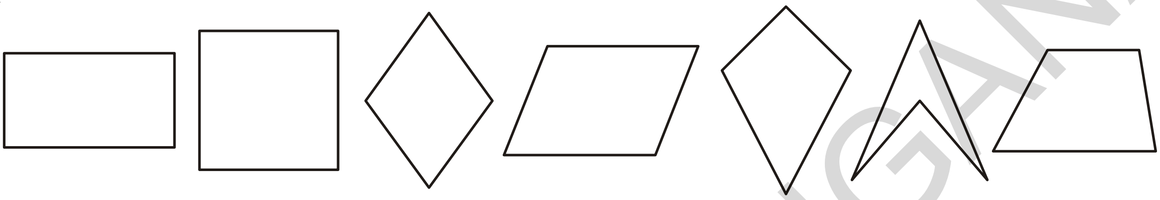
  (vi) $\dfrac{a^m}{b^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ जर $n > m$ (vii) $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

  (viii) $a^0 = 1$ (येथे $a \neq 0$)

चौकोन 12

इयत्ता सहावी मध्ये आपण चार बाजू असलेली आकृती म्हणजे चौकोन म्हणजे काय,याची माहिती घेतली आहे. या घटकामध्ये आपण चौकोनाचे विविध प्रकार आणि त्यांची वैशिष्ट्ये यांचा सविस्तर पणे अभ्यास करू.

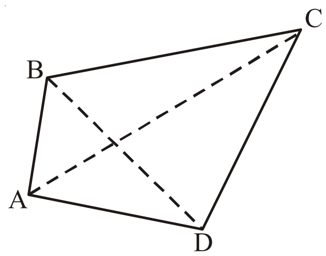
12.0 चौकोन



वरील सर्व आकृत्यांमध्ये तुम्हाला कोणती समानता आढळून येते ?

(उत्तर संकेत-बाजुंची संख्या कोन, शिरोबिंदू ही आकृती सर्व बाजूंनी बंदिस्त आहे. अथवा नाही.?)

म्हणून चौकोन ही चार बाजू, चार कोन व चार शिरोबिंदू असणारी बंदिस्त आकृती आहे.
चौकोन ABCD मध्य



(i) चार बाजू $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ आणि $\overline{DA}$

(ii) चार शिरोबिंदू A, B, C आणि D.

(iii) चार कोन $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ आणि $\angle DAC$.

(iv) समोरासमोरील शिरोबिंदूना जोडणारी रेषा म्हणजे कर्ण होय $\overline{AC}$ व $\overline{BD}$ हे चौकोन ABCD चे कर्ण आहेत.

(v) चौकोनाच्या एकाच शिरोबिंदूतून निघणाऱ्या दोन बिंदूना लगतच्या बाजू म्हणतात. चौकोन ABCD मध्ये $\overline{AB}$ व $\overline{BC}$ या लगतच्या बाजू आहेत. व B हा शिरोबिंदू त्यांचा सामाईक शिरोबिंदूच आहे.

(vi) चौकोनाची एक भुजा सामाईक असणारे दोन कोन म्हणजे, चौकोनाचे लगतचे कोन असतात. म्हणून $\angle ABC$ व $\angle BCD$ ही लगतच्या कोनांची जोडी आहे आणि ही $\overline{BC}$ त्यांची सामाईक भूजा आहे.

सरावासाठी

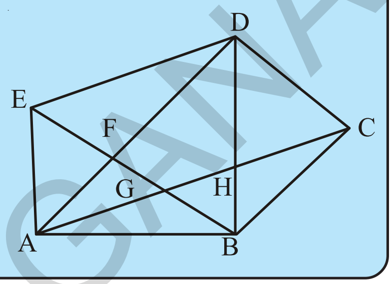
1. चौकोनातील इतर लगतच्या बाजू व सामाईक शिरोबिंदू शोधा.
2. लगतच्या कोनांच्या जोडया व सामाईक बाजू शोधा.

(vii) चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजूंना विरुद्ध बाजू किंवा विरुद्ध भुजा म्हणतात. म्हणून $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ आणि $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ या विरुद्ध बाजूंच्या दोन जोड्या आहेत.

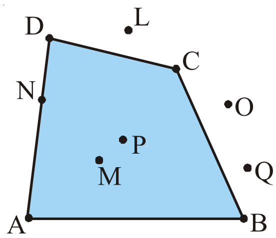
(viii) चौकोनाच्या ज्या दोन कोनांमध्ये सामाईक भुजा असत नाही त्यांना विरुद्ध कोन म्हणतात. किंवा चौकोनातील समोरासमोरील कोनांना विरुद्ध कोन म्हणतात. म्हणून $\angle BAD$, $\angle DCB$ आणि $\angle ADC$, $\angle CBA$ याविरुद्ध कोनांच्या दोन जोड्या आहेत.

सरावासाठी

बाजूच्या आकृतीत किती चौकोन आहेत ?
शोधा व नावे सांगा.



12.1 चौकोनाच्या अंतर्भाग व बाह्यभाग –



चौकोन ABCD मध्ये कोणते बिंदू चौकोनाच्या अंतर्भागात आहेत ?

कोणते बिंदू चौकोनाच्या बाह्यभागात आहेत ?

कोणते बिंदू चौकोनावर आहेत ?

बिंदू P आणि M हे चौकोनाच्या अंतर्भागात आहेत. L, O आणि Q हे बिंदू चौकोनाच्या बाह्यभागातील बिंदू आहेत.

तसेच N, A, B, C, D हे बिंदू चौकोनावरील बिंदू आहेत.

चौकोनाच्या अंतर्भागात शक्य तेवढे बिंदू काढा व त्यांा नावे द्या.

चौकोनाच्या बाह्यभागात शक्य तेवढे बिंदू काढा व त्यांना नावे द्या.

चौकोनाच्या अंतर्भागात किती बिंदू काढता येतील ?

12.2 बहीर्वक्र व अंतर्वक्र चौकोन

चौकोन ABCD काढा. L व M बिंदू चौकोनाच्या अंतर्भागात काढा. आता हे L व M बिंदू जोडा.

L व M बिंदूंना जोडणारी रेषा किंवा या रेषेचा काही भाग

चौकोनाच्या बाह्यभागात आहे का ? असे कोणतेही दोन बिंूद तुम्ही चौकोनाच्या अंतर्भागात काढू शकता का, ज्यांना जोडणारी रेषा चौकोनाच्या बाह्यभागात येईल.

तुम्हाला आढळून येईल की, हे शक्य नाही. आता हीच कृती आपण चौकोन PQRS मध्ये करू.

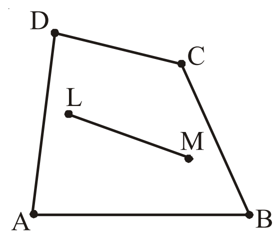
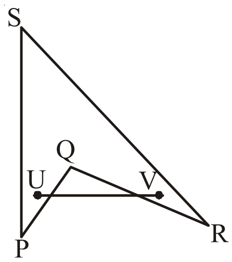


Figure1

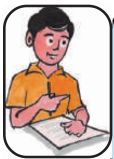
आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे बिंदू U आणि V चौकोनाच्या अंतर्भागात काढले व त्यांना जोडा U आणि V बिंदू यांना जोडणारी रेषा चौकोनाच्या बाह्यभागातून जाते का ? अशाच प्रकारच्या आणखी रेषा/रेषाखंड तुम्ही चौकोन मध्ये PQRS काढू शकता का ?



चौकोनाच्या अंतर्भागातच राहणारी दोन बिंदू जोडणारी अशी एक किंवा अनेक रेषाखंड तुम्ही काढू शकता का ? हो तुम्ही असे रेषाखंड सुद्धा काढू शकता.

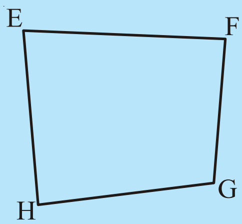
चौकोन ABCD हा बहीर्वक्र चौकोन आहे. कारण, त्याच्या अंतर्भागातील बिंदू जोडणारे सर्व रेषाखंड हे चौकोनाच्या अंतर्भागातच आहेत.

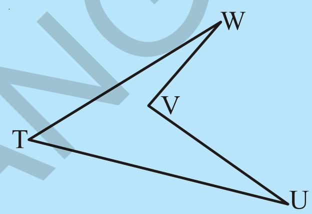
चौकोन PQRS हा अंतर्वक्र चौकोन होऊ शकतो , जर त्याच्या अंतर्भागातील बिंदू जोडणारे सर्व रेषाखंड हे चौकोनाच्या बाह्यभागातून सुद्धा जाऊ शकतो.



सरावासाठी

1.





(i) EFGH हा बहिर्वक्र चौकोन आहे का ?

(ii) TUVW हा अंतर्वक्र चौकोन आहे का

(iii) चौकोन EFGH.मध्ये दोन्ही कर्ण काढा. ते परस्परांना छेदतात का ?

(iv) चौकोन TUVW मध्ये दोन्ही कर्ण काढा. ते परस्परांना छेदतात का ?

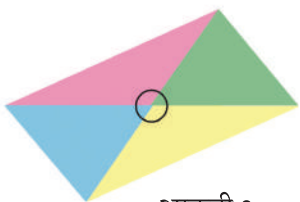
तुम्हाला दिसून येईल की, बहिर्वक्र चौकोनाचे कर्ण परस्परांना चौकोनाच्या अंतर्भागातच छेदतात. आणि अंतर्वक्र चौकोनाचे कर्ण परस्परांना चौकोनाच्या बहिर्वक्र चौकोनाचे कर्ण परस्परांना चौकोनाच्या बहिर्भागात छेदतात.

12.3 चौकोनाच्या कोनांच्या मापाच्या बेरजेचा गुणधर्म

कृती 1

एक कागदी पुठ्ठा घ्या. त्यावर चौकोन ABCD काढा. त्यानंतर आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे त्यांचे चार तुकडे करा. (आकृती क्र1) आता आकृती 2 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे त्यांना अशा प्रकारे एकत्र करा की $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ एका ठिकाणी येऊन मिळतील.

आकृती 1



आकृती 2

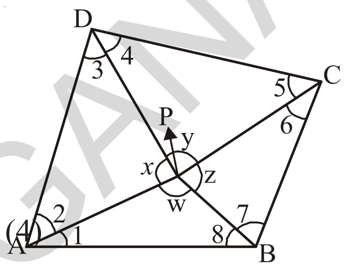
$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ and $\angle 4$ यांच्या मापाची बेरीज 360^0 येते की ?

चौकोनाच्या चार कोनाच्या मापांची बेरीज 360^0 येते.

(नोट – आपण कोनांच्या निर्देश 1,2,3, इ. अशा प्रकारे दाखवू शकतो. आणि त्यांची मापे अनुक्रमे $m\angle 1$, $m\angle 2$, $m\angle 3$ इ. अशा नांवानी दाखवू शकतो.)

आपण हाच नियम आणखी वेगळ्या प्रकारे तपासून पाहू शकतो.

1. चौकोन ABCD च्या अंतर्भागात P हा बिंदू घ्या P बिंदूशी चौकोनाचे सर्व शिरोबिंदू जोडा.



आकृतीत मधील ΔPAD चा विचार करू.

$m\angle 2 + m\angle 3 = 180° - x$ .... (1)

त्याचप्रमाणे, ΔPDC मध्ये, $m\angle 4 + m\angle 5 = 180° - y$ .... (2)

ΔPCB मध्ये, $m\angle 6 + m\angle 7 = 180° - z$ आणि .... (3)

ΔPBA मध्ये , $m\angle 8 + m\angle 1 = 180° - w$. .... (4)

त्रिकोणाच्या कोनांच्या बेरजेच्या गुणधर्मानुसार –

(1), (2), (3) and (4) यांची बेरीज करून

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 + m\angle 7 + m\angle 8$

$= 180° - x + 180° - y + 180° - z + 180° - w$

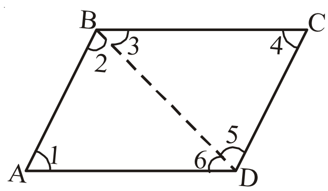
$= 720° - (x + y + z + w)$

$(x + y + z + w = 360°$; बिंदु वर कोनाची बेरीज)

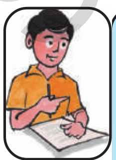
$= 720° - 360° = 360°$

चौकोनाच्या चारही कोनांच्या मापाची बेरिज 360^0 असते.

2. कोणताही चौकोन ABCD घ्या, त्यांचे दोन त्रिकोनात विभाजन करा, म्हणजेच एक कर्ण काढा 1,2,3,4,5,6 असे सहा कोन तयार होतील.

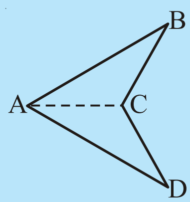


त्रिकोणा कोनाच्या मापाचा गुणधर्म वापरून $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ व $\angle D$ यांची बेरीज $360°$ येते हे आपण सिद्ध करू शकतो.



सरावासाठी

जर चौकोन बहिर्वक्र नसेल तर काय होईल ? चौकोन ABCD घ्या. त्याचे त्रिकोणात विभाजन करा. आणि कोनांच्या मापांची बेरीज शोधा. अंतर्वक्र चौकोनाच्या कोनांच्या मापाची बेरीज किती होईल ?



उदाहरण 1 : एका चौकोनाचे तीन कोनांचे माप 55^0, 65^0 आणि 105^0 आहेत. चौथ्या कोनाचे माप किती?

उत्तर : चौकोनाच्या चार कोनांच्या मापांची बेरीज 360^0 असते.

दिलेल्या तीन कोनांच्या मापांची बेरीज $55^0 + 65^0 + 105^0 = 225^0$

म्हणून, चौथा कोन $= 360° - 225° = 135°$

उदाहरण 2 : एका चौकोनाच्या दोन कोनांचे माप 80^0 व 120^0 आहे. उर्वरित दोन कोन समान मापाचे आहेत. तर त्यांची मापे काय असतील.

उत्तर : चार कोनांच्या मापांची बेरीज 360^0 असते.

दोन मापांची बेरीज $= 80° + 120° = 200°$

म्हणून उर्वरित दोन मापांचे माप $= 360° - 200° = 160°$

दोन्ही कोन समान मापाचे आहेत.

म्हणून $= 160° \div 2 = 80°$

उदाहरण 3 : एका चौकोनाचे कोन $x°$, $(x - 10)°$, $(x + 30)°$ आणि $2x°$ आहेत. त्यांची मापे काढा.

उत्तर : चार कोनांची बेरीज $= 360°$

म्हणून $x + (x - 10) + (x + 30) + 2x = 360°$

$$5x + 20 = 360°$$

$$x = 68°$$

म्हणून ते चार कोन पुढील प्रमाणे आहेत $= 68°$; $(68-10)°$; $(68+30)°$; $(2×68)°$

$= 68°, 58°, 98°$ and $136°$.

उदाहरण 4 : एका चौकोनाच्या चार कोनांचे गुणोत्तर 3 : 4 : 5 : 6 आहे ते कोन काणते ?

उत्तर : चार कोनांच्या मापांची बेरीज $= 360°$

कोनाचे गुणोत्तर 3 : 4 : 5 : 6

म्हणून ते कोन $3x$, $4x$, $5x$ and $6x$.

$$3x + 4x + 5x + 6x = 360$$

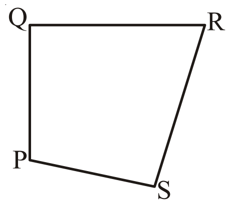
$$18x = 360$$

$$x = \frac{360}{18} = 20$$

म्हणून, ते कोन $= 3 \times 20; 4 \times 20; 5 \times 20; 6 \times 20$

$= 60°, 80°, 100°$ and $120°$

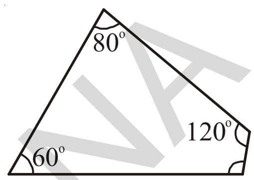
स्वाध्याय - 1



1. चौकोन PQRS मध्ये,

   1) बाजू, कोन, शिरोबिंदू आणि कर्णाची नावे सांगा.

   2) लगतच्या बाजू, लगतची कोनाची जोडी, विरुद्ध बाजू आणि विरुद्ध कोन यांचे नावे सांगा.



2. एका चौकोनाचे तीन कोन आहेत 60°, 80° व 120° आहेत. चौथा कोन कोणता ? माप सांगा.

3. एका चौकोनाच्या कोनाचे गुणोत्तर 2 : 3 : 4 : 6 आहे प्रत्येक कोनाचे माप काढा.

4. एका चौकोनाचे चारही कोन समान मापाचे आहेत हा चौकोन तुमच्या वहीमध्ये काढा व प्रत्येक कोनाचे माप शोधा.

5. एका चौकोनाचे चार कोन $x°$, $(x + 10)°$, $(x + 20)°$, $(x + 30)°$ आहेत. तर त्याचे मापे शोधा.

6. एका चौकोनाच्या कोनाचे गुणोत्तर 1 : 2 : 3 : 6.असू शकत नाही का ? कारण सांगा.

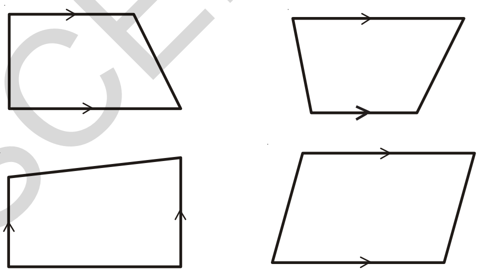
   (अशीच आकृती वहीवर काढण्याचा प्रयत्न करा.)

12.4 चौकोनाचे प्रकार

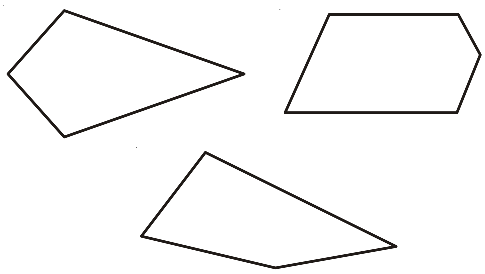
बाजूचे कोन यांच्या रचनेवरून चौकोनाचे वेगवेगळे प्रकार पडतात.

12.4.1 समलंब चौकोन

ज्या चौकोनातील समोरासमोरील बाजूंची एक जोडी समांतर असते, त्या चौकोनाला समलंब चौकोन म्हणतात.



हे समलंब चौकोन आहेत.



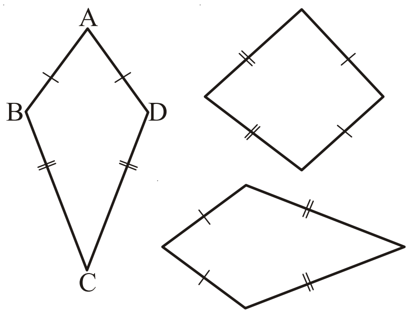
हे समलंब चौकोन नाहीत.

(टिप - बाणाचे संकेत समांतर रेषा दर्शवतात.)

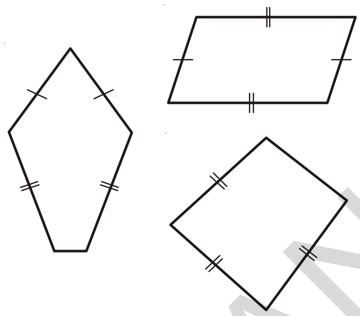
वरील आकृती समलंब चौकोन का नाहीत ?

12.4.2 पतंग

पतंग हा विशेष प्रकारचा चौकोन आहे. सारख्या खुणा असणा-या बाजू समान आहेत. उदा. $AB = AD$ आणि $BC = CD$.



वरील आकृत्या पतंग आहेत.



वरील आकृत्या पतंग नाहीत.

या आकृती पतंग का नाहीत. ?

निरीक्षण करा की,

(i) पंतग चौकोनाला चार बाजू असतात. (हा चौकोन बहिर्वक्र असतो.)

(ii) या चौकोनात दोन वेगळया व क्रमवार जोड्या असतात.

कृती 2

एक जाड कागद घ्या. त्याला मधोमध दुमडा. आकृतीत (1) दाखवल्याप्रमाणे दोन रेषांखड काढा.

रेषाखंडापासून होणारा आकार कापून घ्या. (आकृती 2) तुम्हाला पंतगाचा आहार मिळेल. पंतगातील

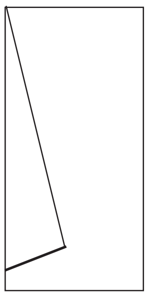


Figure1

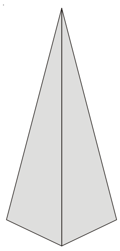


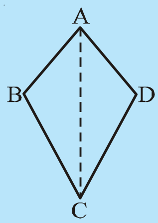
Figure2

रेषा समरूप आहेत का ? कर्णांच्या दिशेने पतंग दुमडा. तयार झालेला पंतग योग्य कापला गेला आहे का, हे तपासा.

पंतगाचे कर्ण समान लांबीचे आहेत का ? मोजून किंवा कागद दुमडून हे तपासून पाहा की, कर्ण परस्परांना दुभागतात?

सरावासाठी

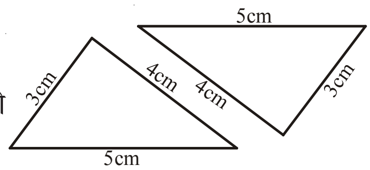
सिद्ध करा - पंतग ABCD मध्ये ΔABC आणि ΔADC हे एकरूप आहेत.

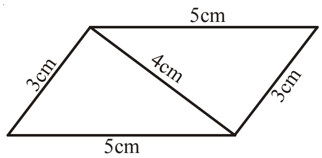


12.4.3 समांतरभुज चौकोन

कृती – 3

एका जाड कागदी पुठ्ठ्याचे 3 cm, 4 cm, 5 cm. बाजू असणारे दोन त्रिकोण घ्या. आणि ते दोन त्रिकोण आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे परस्परांना जोडा.



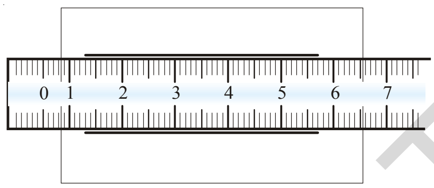


हे दोन त्रिकोण जोडून मिळणारी आकृती म्हणजेच समांतरभूज चौकोन होय. येथे कोणत्या दोन बाजू समांतर आहेत? समांतरबाजू एकरूप आहेत का ? याच त्रिकोणाच्या वापर करून तुम्ही आणखी दोन समांतरभूज चौकोन मिळवू शकता ते दोन समांतरभूज चौकोन शोधा/तयार करा.

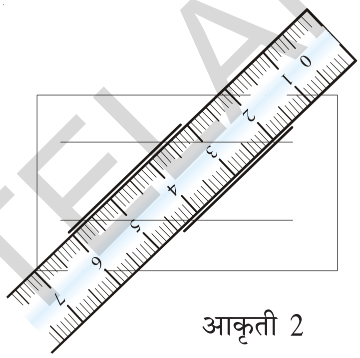
समांतरभूज चौकोनाच्या परस्परांसमोरील कोणत्याही दोन बाजू समांतर असतात.

कृती 4

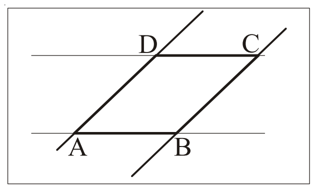
एक इंचपट्टी घ्या. इंचपट्टी कागदावर ठेऊन आकृतीत 1 दाखवल्याप्रमाणे तिच्या दोन्ही बाजूला रेषा काढा. नंतर आकृतीत 2 दाखवल्याप्रमाणे इंचपट्टी आधी दोन्ही बाजूला रेषा काढा. तुम्ही काढलेल्या या चार रेषांपासून समोरासमोरील बाजू समांतर असणारी 'समांतरभुज चौकोन' ही आकृती तयार होईल.



आकृती 1



आकृती 2



आकृती 3

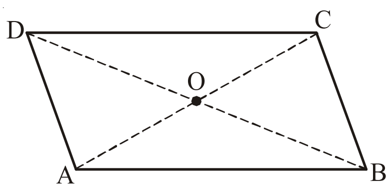
ज्या चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू समांतर असतात. त्याला समांतरभूज चौाकोन म्हणतात.

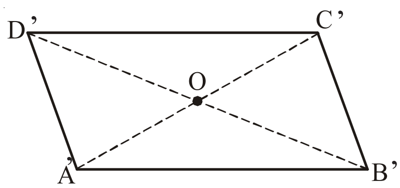
12.4.3(a) समांतरभुज चौकोनचे गुणधर्म

समांतरभुज चौकोनाच्या बाजू

कृती – 5

दोन समांतरभूज चौकोनाच्या आकाराचे व एकरूप कागदी पुठ्ठे घ्या. त्यांचे नावे ABCD आणि A'B'C'D' अशी द्या.





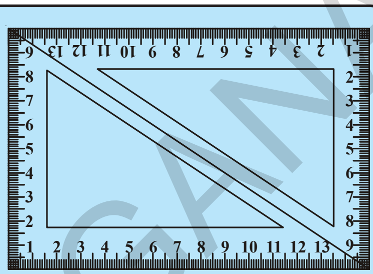
येथे $\overline{AB}$ आणि $\overline{A'B'}$ ह्या एकरूप बाजू आहेत. त्याचप्रमाणे इतर संगत बाजू सुद्धा एकरूप आहेत. $\overline{A'B'}$ ही बाजू $\overline{DC}$ वर ठेवा. त्या परस्परांशी एकरूप आहेत का ? तसेच $\overline{A'B'}$ आणि $\overline{DC}$ यांची लांबी सुद्धा तपासून पहा. काय आढळून आले ते सांगा.

तुम्हाला समजेल की, दोन्ही वेळा बाजू समान/एकरूप आहेत. म्हणून **समांतरभूज चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू समान असतात.**

तुम्ही हाच नियम समांतरभूज चौकोनाच्या बाजू इंचपट्टीने मोजून सुद्धा पडताळून पाहू शकता.

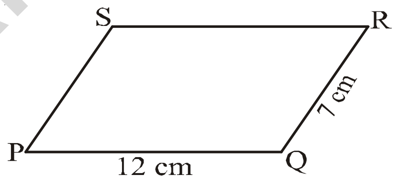
सरावासाठी

दोन मापाचे दोन मापाचे $30° - 60° - 90°$ त्रिकोण घ्या आणि आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे परस्परांच्या लगत ठेवा. हेच वैशिष्ट तुम्ही या कृतीवरून तपासून पाहू शकता का? प्रत्येक आयत हा समांतरभूत चौकोन असतो का ?



उदाहरण 5 : समांतरभुज चौकोन PQRS ची परीमिती काढा.

उत्तर : समांतरभुज चौकोनामध्ये समोरासमोरील बाजूंची लांबी सारखीच असते.



आकृतीत दिल्याप्रमाणे PQ= SR = 12 cm

आणि QR = PS = 7 cm

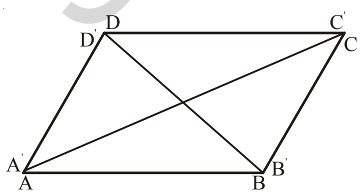
म्हणून, परिमिती = PQ + QR + RS + SP

= 12 cm + 7 cm + 12 cm + 7 cm = 38 cm

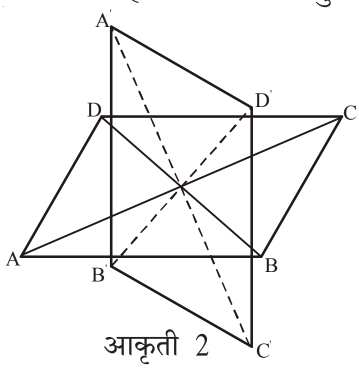
समांतरभुज चौकोनाचे कोन

कृती – 6

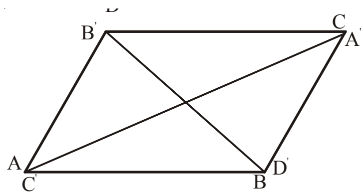
ABCD हा एक समांतरभुज चौकोन घेऊन असाच चौकोन ट्रेस पेपर वर गिरवून काढा. आणि त्याला A′ B′ C′ D′ असे नाव देऊ. आकृती 1 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे A′, B′, C′, D′ ला ABCD वर ठेवा. ज्या बिंदूवर कर्ण परस्परांना छेदतात तेथे टाचणी लावा. आता ट्रेस पेपर 90° कोनात फिरवा (आकृती 2) प्रमाणे पुन्हा तो चौकोन 90^0 च्या कोनात फिरवा तुम्हाला आकृती – 3 प्रमाणे समांतरभुज चौकोन मिळेल. तुम्हाला हेही दिसेल A′ हा C आणि C′ हा A वर तंतोतंत जुळेल. त्याचप्रमाणे B′ हा D वर आणि D′ हा B वर तंतोतंत जुळेल.



आकृती 1



आकृती 2



आकृती 3

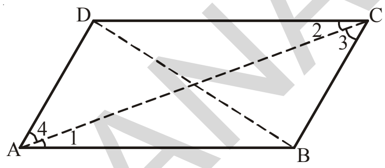
परस्परासमोरील बाजू A आणि C यांची मापे एकसमान आहेत हे तुम्हाला समजले असेलच. अशाचपद्धतीने बाजू B आणि D यांची मापे शोधा.

सारांश : समांतरभूज चौकोनातील परस्परविरूद्ध कोन सारख्याच मापाचे असतात.

सरावासाठी –

दोन मापाचे $30° – 60° – 90°$ मापाचे सारखेच त्रिकोण घ्या समांतरभुज चौकोन तयार करा. तयारी होणारी आकृती वरील वैशिष्ट्य समजण्यासाठी मदत करील का ?

हीच संकल्पना खालील तर्कावरून देखील समजेल –



समजा, ABCD हा समांतरभुज चौकोन असून $\overline{AC}$ व $\overline{BD}$ हे त्याचे कर्ण आहेत.

$\angle 1 = \angle 2$ आणि $\angle 3 = \angle 4$ आहे. (व्युत्क्रम कोनाच्या गुणधर्मानुसार)

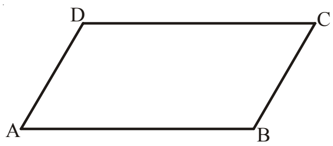
ΔABC आणि ΔCDA हे एकरूप त्रिकोण आहेत $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (को-बा-को कसोटीनुसार)

म्हणून $m\angle B = m\ \angle D$ (एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन)

त्याचप्रमाणे $\Delta ABD \cong \Delta CDB$, म्हणून $m\ \angle A = m\ \angle C$ (एकरूप त्रिकोणाचे संगत कोन)

म्हणून :- समांतरभुज त्रिकोणाचे समोरासमोरील कोन सारख्याच मापाचे असतात.

आता आपण समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या कोनांकडे लक्ष देऊ/विचार करू.



समांतरभुज चौकोन ABCD, $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ आणि $\overline{DA}$ ही छेदिका आहे.

म्हणून, $\angle A$ आणि $\angle D$ हे कोन छेदिकेच्या एकाच बाजूला असणारे आंतरकोन आहेत. म्हणूनच ते परस्परपूरक आहेत.

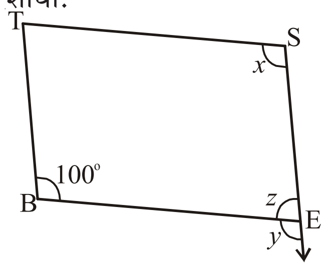
$\angle A$ आणि $\angle B$ सुद्धा पूरक आहेत. तुम्ही सांगू शकता की, ते पुरक आहेत ?

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ आणि $\overline{BA}$ ही त्यांची छेदिका आहे. आणि $\angle A$ व $\angle B$ आंतरकोन आहेत.

सरावासाठी –

वर दिलेल्या समांतरभुज चौकोन ABCD मध्ये दोन पुरक कोनांच्या जोड्या शोधा.

उदाहरण 6 : BEST हा समांतरभुज चौकोन आहे x, y आणि z यांची मापे शोधा.



उत्तर : $\angle S$ आणि $\angle B$ हे समोरासमोरील कोन आहेत.

म्हणून $x = 100°$ (विरूद्ध कोनांचा गुणधर्म)

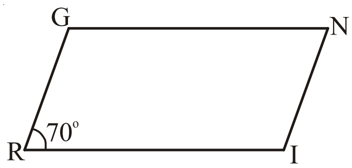
$y = 100°$ (संगत कोनांचा गुणधर्मद्ध)

$z = 80°$ ($\angle y, \angle z$ रेषीय जोडीतील कोन आहेत)

समांतर भुज चौकोनाचे लगतचे कोन परस्पर पुरक असतात. या पूर्वीच्या उदाहरणामध्ये सुद्धा आपण हाच निष्कर्ष काढला होता.

उदाहरण 7 : समांतरभुज चौकोन RING मध्ये $m\angle R = 70°$ तर उरलेल्या तीन कोनांची मापे काढा.

उत्तर : प्रश्नात सांगितल्याप्रमाणे $m\angle R = 70°$



म्हणून $m\angle N = 70°$

(समोरासमोरील कोन)

परंतु $\angle R$ व $\angle I$ हे पूरस्परपूरक आहेत.

$m\angle I = 180° - 70° = 110°$

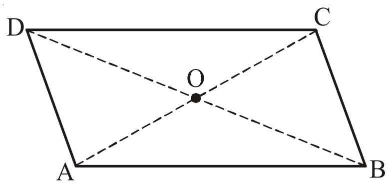
तसेच $m\angle G = 110°$ $\angle G$ व $\angle I$ समोरासमोरील कोन आहे.

म्हणून $m\angle R = m\angle N = 70°$ व $m\angle I = m\angle G = 110°$

सरावासाठी –
वरील उदाहरणातील $m\angle I$ आणि$m\angle G$ यांची मापे दुसऱ्या पद्धतीने काढता येतील का ?
(क्लृप्ती : चौकोनाच्या कोनांच्या बेरजेचा गुणधर्म.)

12.4.3 (b) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण –

कृती 7 –

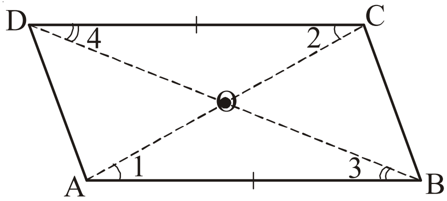


समांतरभुज चौकोनाची प्रतिकृती घ्या. तिला ABCD नाव द्या.

व चौकोनाचे कर्ण $\overline{AC}$ व $\overline{DB}$ यांचा छेदनबिंदू 'O' दर्शवा.

$\overline{AC}$ चा मध्यबिंदू, शिरोबिंदू C ला A वर दूमडून शोधण्याचा प्रयत्न करा. हा मध्यबिंदू '0' हाच आहे का ? तसेच कर्ण $\overline{DB}$ चा मध्यबिंदू शिरोबिंदू D ला B वर दुमडून शोधण्याचा प्रयत्न करा. हा मध्यबिंदू '0' हाच आहे का ?

या वरून कर्ण $\overline{DB}$ हा कर्ण AC ला ' O' बिंदूमध्ये छेदतो. हे निश्चित होते का ? तुमच्या मित्रांसोबत चर्चा करा. DB चा मध्यबिंदू शोधण्यासाठी हीच कृती पुन्हा करा.



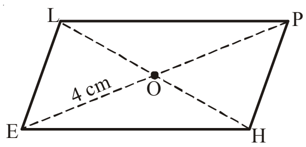
समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात ?

को-बा-को कसोटीनुसार देखील हा गुणधर्म स्पष्ट करणे. अवघड नाही.

$\Delta AOB \cong COD$ (को-बा-को चा वापर कसा केला आहे.)

यावरून $AO = CO$ आणि $BO = DO$

उदाहरण 8 : HELP हा समांतरभुज चौकोन आहे. O हा कर्ण HL आणि कर्ण PE यांचा छेदनबिंदू आहे. OE = 4 cm HL = 5 cm तर PE पेक्षा HL जास्त आहे का? OH ची लांबी शोधा.



उत्तर : जर OE = 4 cm तर OP सुद्धा 4 cm असेल.

म्हणून PE = 8 cm

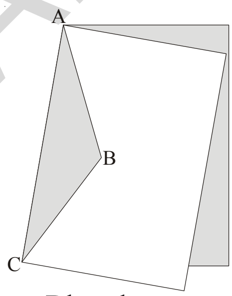
HL = PE पेक्षा 5 cm जास्त आहे

म्हणून HL = 8 + 5 = 13 cm

म्हणून $OH = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$ cms

12.4.4 समभूज चौकोन

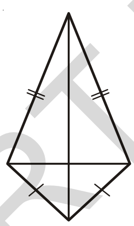
तुम्हाला 'पतंगाकृती चौकोना'ची केलेली प्रतिकृती आठवते का ? त्याचप्रमाणे कागद कापायचा आहे. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे ABC कापा आणि उघडा. तुम्हाला एक पतंगाची आकृती मिळेल. पतंगाच्या बाजू AB व BC या असमान होत्या जर तुम्ही AB = BC घेऊन कागद कापाल तर तुम्हाला मिळणारा पतंग हा समभुज चौकोन असेल. समभूज चौकोनाकृती कापा.

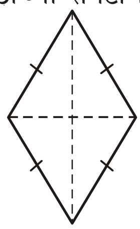


Rhombus-cut

लक्षात घ्या की, समभुज चौकोनाच्या सर्व बाजू समान असतात.पण पतंग चौकोनाच्या फक्त लगतच्या बाजू समान असतात. चारही बाजू समान नसतात.

समभुज चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू समांतर असतात. म्हणून समभुज चौकोन हा समांतरभुज चौकोन देखील असतो. म्हणून समभूज चौकोनामध्ये समांतरभूज चौकोन आणि पंतग यांची सर्व वैशिष्ट्य असतात. या सर्व वैशिष्टयांची यादी करण्याचा प्रयत्न करा. त्यावरून तुम्ही तुमची यादी व पाठाच्या शेवटी दिलेली यादी यांची तुलना करू शकता.


पतंग


समभुज चौकोन

समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लबंदुभाजक असतात.

कृती 8

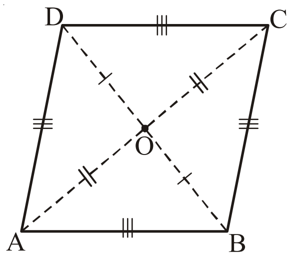
एक समभुज चौकानाकृती कागद घ्या. कागद दुमडून दोन्ही कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असल्याची खात्री करा. तुम्ही हे सुद्धा तपासून पाहू शकता की, दोन्ही कर्ण परस्परांना काटकोनात छेदतात.

आता आपण हाच गुणधर्म काही तर्कापासून तपासून पाहू,

ABCD हा समभुज चौकोन आहे, त्याचप्रमाणे समांतरभुज चौकोन सुद्धा आहे.

म्हणून OA = OC आणि OB = OD.

आता आपल्याला $m\angle AOD = m\angle COD = 90°$ हे दाखवावे लागेल.



आपण त्रिकोणाच्या बा-बा-बा कसोटीनुसार हे सांगू शकतो की,

$$\Delta AOD \cong \Delta COD$$

म्हणून, $m\angle AOD = m\angle COD$

पण $\angle AOD$ व $\angle COD$ रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

$$m\angle AOD = m\angle COD = 90°$$

आपण असा निष्कर्ष काढू शकतो की, समभूज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदूभाजक असतात.

12.4.5 आयत -

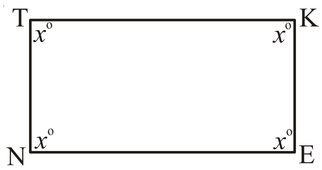
चार कोन समान मापाचा असणाऱ्या समांतरभुज चौकोनाला आयत म्हणतात.

(ज्या चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजूंच्या जोडया समान मापाच्या असतात. आणि प्रत्येक कोन काटकोन असतो. त्या चौकोनास आयत म्हणतात.)

वरील व्याख्येचा पुर्ण अर्थ काय होतो ? तुमच्या मित्रांसोबत चर्चा करा.

जर आयताच्या चारही कोनांचे माप सारखेच असेल तर, प्रत्येक कोनाचे माप किती असेल ?

समजा प्रत्येक कोनाचे माप $x°$ आहे.



तेव्हा $4x° = 360°$ (का) ?

म्हणून $x° = 90°$

म्हणून आयताचा प्रत्येक कोन काटकोन असतो ?

यावरून आपण असे म्हणू शकतो की, आयत हा असा समांतरभूज चौकोन आहे. की ज्याचा प्रत्येक कोन काटकोन आहे.

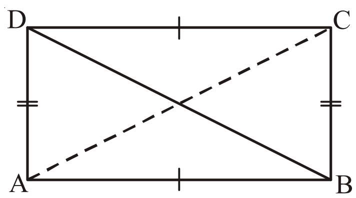
आयत हा समांतरभूज चौकोन असल्यामुळे समोरासमोरील बाजू समान मापाच्या असतात आणि कर्ण परस्परांना दुभागतात समांतरभुज चौकोनामध्ये कर्ण असमान असू शकतात.

(तपासून पहा) पण, आयतामध्ये कर्ण समान लांबीचे असतात.

ते पडताळण्यासाठी सोपे आहे -

जर ABCD हा आयत आहे,

$$\Delta ABC \cong \Delta ABD$$



कारण, $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (सामाईक भुजा)

$BC = AD$ (का) ?

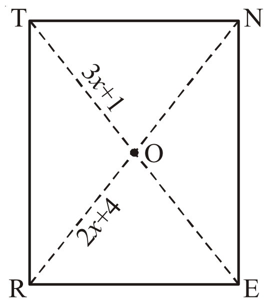
$m\angle A = m\angle B = 90°$ (का) ?

म्हणून बा-को-बा कसोटीनुसार $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ आणि $AC = BD$

(एकरूप त्रिकोणाच्या एकरूप बाजू (एकास एक संमतीनुसार))

म्हणून आयतामध्ये कर्ण समान मापाचे असतात.

उदाहरण 9 : RENT हा आयत आहे. O हा त्याचा कर्णाचा छेदनबिंदू आहे. जर $OR = 2x + 4$ आणि $OT = 3x + 1$. xशोधा.



उत्तर : OT हा कर्ण TE च्या निम्मा आहे. आणि OR हा कर्ण RN च्या निम्मा आहे.

येथे कर्ण सारख्याच मापाचे आहेत (का)?

म्हणून त्यांचे निम्मे भाग सुद्धा समान आहेत.

म्हणून $3x + 1 = 2x + 4$

$$x = 3$$

12.4.6 चौरस

ज्या आयताच्या सर्व बाजू समान आहेत त्याला चौरस म्हणतात.

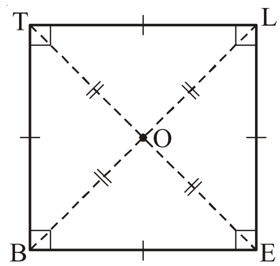
म्हणजेच चौरसामध्ये आयताचे सर्वच गुणधर्म आहेत त्याचप्रमाणे त्याचा स्वत:चा एक विशेष गुणधर्म म्हणजे त्याचा सर्व बाजू समान मापाच्या आहेत.

चौरसाचे कर्ण आयताच्या कर्णाप्रमाणेच समान लांबीचे असतात.

आयतामध्ये कर्ण परस्पराना लंब असणे गरजेचे नाही (तपासून पहा.) पण चौरसाचे कर्ण परस्परांना लंब असतात.

आपण हे पडताळून पाहू –

BELT हा चौरस आहे म्हणून, $BE = EL = LT = TB$



आता आपण ΔBOE आणि ΔLOE याचा विचार करू.

$OB=OL$ (का?)

OE ही सामाईक भुजा आहे.

म्हणून, बा-बा-बा कसोटीनुसार $\Delta BOE \cong LOE$

म्हणून $\angle BOE = \angle LOE$

परंतू $\angle BOE + \angle LOE = 180^\circ$ (का?)

$$\angle BOE = \angle LOE = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

म्हणून चौरसातील कर्ण हे परस्परांस लंबदुभाजक असतात.

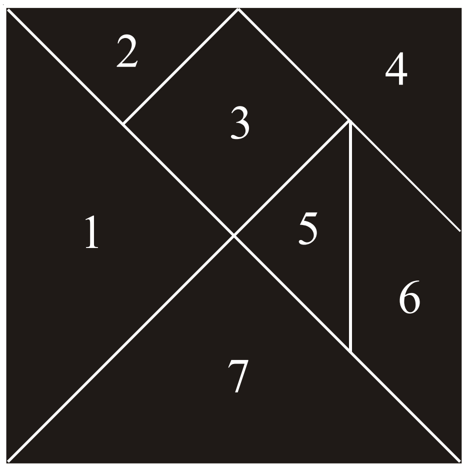
चौरसाचे कर्ण –

(i) परस्परांना दुभागतात (चौरस हा समांतरभूज चौकोन असतो.)

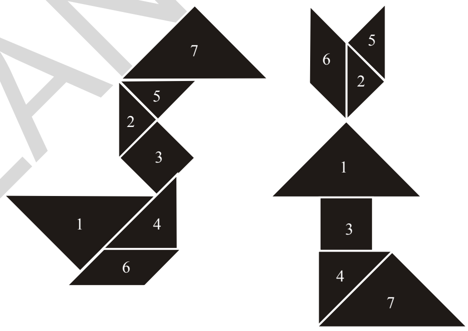
(ii) समान लाबीचे असतात. (चौरस हा आयत असतो) आणि

(iii) परस्परांना लंब असतात.

12.5 टँग्रॅमच्या सहाय्याने आकृती बनवणे

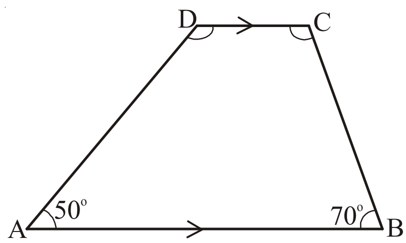


(टँग्रॅम ही चीनी कोडे आहे यात पाच त्रिकोण,चौरस, समांतरभुज चौकोन,इ. आकृत्यांचे काप असतात.)
टॅग्रॅमचे सर्व तुकडे वापरून समलंब चौकोन, समांतरभुज चौकोन आयत व चौरस या आकृत्या बनवा. त्याचप्रमाणे, शक्य तितक्या वेगवेगळया आकृत्या बनवा दोन आकृत्या उदाहरणादाखल दिलेल्या आहेत.



उदाहरण 10 : समलंब चौकोन ABCD, मध्ये $\overline{AB}$ व $\overline{CD}$ हे समांतर आहेत.

जर $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. $\angle C$ व $\angle D$ शोधा.



उत्तर : $\overline{AB}$ व $\overline{CD}$ हे समांतर आहेत.

$\angle A + \angle D = 180°$ (छेदिकेच्या एकाच बाजूचे आंतरकोन)

म्हणून $\angle D = 180° - 50° = 130°$

तसेच $\angle B + \angle C = 180°$

म्हणून $\angle C = 180° - 70° = 110°$

उदाहरण 11 : समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या कोनांचे गुणोत्तर 3 : 2 आहे, तर त्याच्या कोनांचे माप काय असेल ?

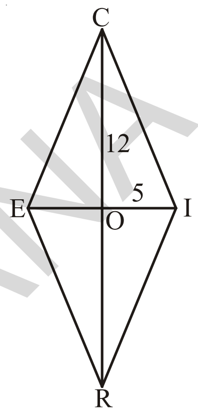
उत्तर : समांतरभुज चौकोनाचे लगतचे कोन परस्परपूरक असतात.

म्हणून त्यांची बेरीज = 180° असते

लगतच्या कोनांचे गुणोत्तर = 3:2

म्हणून प्रत्येक कोनाचे माप $180 \times \frac{3}{5} = 108^\circ$ आणि

$$180 \times \frac{2}{5} = 72^\circ$$



उदाहरण 12 : RICE हा समभूज चौकोन आहे. OE आणि OR चे माप शोधा.

उत्तर : समभूज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

म्हणून OE = OI आणि OR = OC

म्हणून OE = 5 आणि OR = 12

स्वाध्याय - 2

1. चूक की बरोबर ते लिहा.

(i) सर्व आयत चौरस असतात. ( )

(ii) सर्व समभूज चौकोन हे समांतरभूज चौकोन असतात. ( )

(iii) सर्व चौरस समभूज चौकोन आणि आयत असतात. ( )

(iv) सर्व चौरस समांतरभूज चौकोन नसतात. ( )

(v) सर्व पतंग समभूज चौकोन असतात. ( )

(vi) सर्व समभूज चौकोन पंतग असतात. ( )

(vii) सर्व समांतरभुज चौकोन समलंब चौकोन असतात. ( )

(viii) सर्व चौरस समलंब चौकोन असतात. ( )

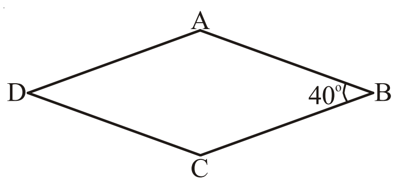
2. स्पष्ट करा की, चौरस हा –

(i) चौरस (ii) समांतरभूज चौकोन आहे.

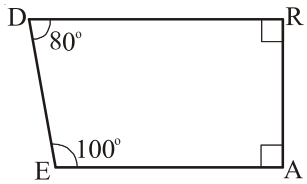
(iii) समभूज चौकोन आहे. (iv) आयत आहे.

3. समभुज चौकोन s ABCD मध्ये

$\angle ABC = 40^\circ$ इतर कोनांची मापे काढा.

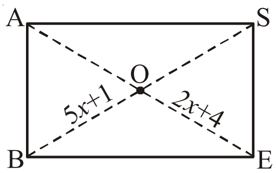


4. समांतरभुज चौकोनाचे लगतचे कोन $x°$ आणि $(2x + 30)°$ आहेत सर्व कोनांची मापे काढा.



5. DEAR हा समलंब चौकोन आहे. स्पष्ट करा. त्याच्या कोणत्या बाजू समांतर आहेत ?

6. BASE हा आयत आहे O हा त्याच्या कर्णांचा छेदनबिंदू आहे. जर OB = $5x+1$ आणि OE = $2x + 4$ तर x ?



7. जर चौकोन ABCD मध्ये $\angle A = 70°$ आणि $\angle C = 65°$ हा समांतरभुज चौकोन होईल का ? कारण सांगा.

8. समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या बाजुंचे गुणोत्तर 5 : 3 आहे. परिमिती 48cm. आहे. प्रत्येक बाजूंची लांबी काढा.

9. एका चौकोनाचे कर्ण परस्परांना लंब आहेत. तर तो चौकोन समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना लंब आहेत. तर तो चौकोन समभुज चौकोनच असेल का ? उत्तर स्पष्ट करण्यासाठी कच्ची आकृती काढा.

10. ABCD हा समलंब चौकोन आहे. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. जर $\angle A = \angle B = 30°$ व तर इतर दोन कोनांचे माप सांगा. ?

11. रिकाम्या जागा भरा.

(i) लगतच्या दोन बाजू समान असणाऱ्या समांतरभूज चौकोनाला................ म्हणतात

(ii) ज्या समांतरभुज चौकोनातील एक दोन 90^0 मापाचा आणि दोन लगतच्या बाजू समान आहेत, त्याला................ म्हणतात

(iii) समलंब चौकोन ABCD मध्ये $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ जर $\angle D = x°$ तर $\angle A =$ ___________.

(iv) समांतरभुज चौकोनाचा प्रत्येक कर्ण त्याला..........त्रिकोणात दुभागतो.

(v) समांतरभुज चौकोन ABCD मध्ये त्याचे कर्ण $\overline{AC}$ व $\overline{BD}$ परस्परांना O बिंदूत दुभागतात. जर AO = 5cm तर AC = _________सेमी

(vi) चौरस ABCD, मध्ये त्याचे कर्ण परस्परांना'O'बिंदूत दुभागतात, तर $\angle AOB =$ ___________

(vii) ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे, तेव्हा $\angle A - \angle C =$ ___________

(viii) आयत ABCD मध्ये AC = 10cm तर, कर्ण BD = ________ सेमी

(ix) चौरस ABCD, मध्ये $\overline{AC}$ कर्ण दिलेला आहे, तर $\angle BAC =$ ___________

पाठ्यावलोकन

1. चार रेषाखंडांनी तयार होणारी बंदिस्त आकृती म्हणजे चौकोन होय.

2. प्रत्येक चौकोन प्रतलाचे तीन भागात विभाजन करतो, अंतर्भाग, बाह्यभाग व चौकोन.

3. प्रत्येक चौकोनाला दोन कर्ण असतात.

4. जर कर्ण हा चौकोनाच्या दोन कर्ण असेल तर तो अंतर्वक्र चौकोन होय. जर दोन पैकी एक कर्ण जरी चौकोनाच्या बाह्यभागात असेल तर तो बहिर्वक्र चौकोन होय.

5. चौकोनाच्या चार ही कोनांच्या मापांची बेरीज 360^0 असते.

6. गुणधर्म/वैशिष्टये

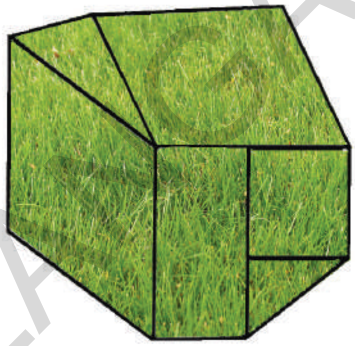
वैशिष्टये	गुणधर्म
समांतरभुज चौकोन : समोरासमोरील बाजू समांतर असणाऱ्या चौकोनास चौकोनास समांतरभुज चौकोन म्हणतात.	(1) समोरासमोरील बाजू समान असतात. (2) समोरासमोरील कोन समान असतात. (3) कर्ण परस्परांना दुभागतात.
समभुज चौकोन : चारही बाजू समान असणारा समांतरभुज चौकोन.	(1) समांतरभुज चौकोनाचे सर्व गुणधर्म (2) कर्ण परस्परांना लंब असतात.
आयत :चारही कोन काटकोन असणारा समांतरभुज चौकोन	(1) समांतरभुज चौकोनाचे सर्व गुणधर्म (2) प्रत्येक कोन काटकोन असतो. (3) कर्ण समान असतात.
चौरस : चारही बाजू समान असणारा आयत.	समांतरभुज चौकोन, समभुज चौकोन, व आयताचे सर्व गुणधर्म
पतंग : लगतच्या बाजू समान लांबीच्या असणारा चौकोन	(1) कर्ण परस्परांना लंब असतात. (2) कर्ण समान मापाचे असतात. (3) कर्ण परस्परांना दुभागतात.
समलंब चौकोन - समोरासमोरील बाजूंची एक जोडी समांतर असणारा चौकोन	1) समोरासमोरील बाजूंची एक जोडी समांतर असते.

क्षेत्रफळ आणि परिमिती 13

13.0 उजळणी

इराला आपल्या अनियमित आकार असलेल्या शेतजमिनीचे क्षेत्रफळाचे शोधायचे आहे. (आकृती 1) म्हणून तिने तिच्या जमिनिच्या विभागणी काही नियमित आकारात जसे त्रिकोण आयत समांतरभूज चौकोन समभूजचौकोन आणि चौरसामध्ये केली. (आकृती 2) तिने विचार केला की, जर या सर्व भागाचे क्षेत्रफळ मला माहीत झाले तर मला माझ्या शेतजमिनीचे क्षेत्रफळ माहित होईल ?

(आकृती 1)

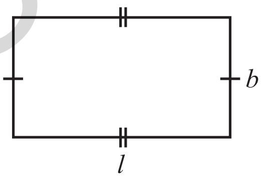
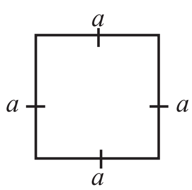


(आकृती 2)

मागील इयत्तेत आपण आयताचे आणि चौरसाचे क्षेत्रफळ कसे काढायचे हे शिकलो. या प्रकरणात आपण समांतरभुज चौकोन, त्रिकोण समभुज चौकोन यांचे क्षेत्रफळ कसे काढतात हे शिकुया. प्रथम आपण मागील इयत्तेत चौरस आणि आयताच्या क्षेत्रफळ, परिमितीविषयी काय शिकलो याचे पुनरावलोकन करू या.

स्वाध्याय - 1

1. खालील सारणी पूर्ण करा.

आकृती	आकार	क्षेत्रफळ	परिमिती
	आयत	लांबी ह्नरूंदी = lb	______
	चौरस	______	4a

2. खालिल सारणीमध्ये काही चौरसाची मापे दिली आहेत तथापि ती अपूर्ण आहेत गाळलेली माहिती शोधा.

चौरसाची बाजू	क्षेत्रफळ	परिमिती
15 सेमी	225 सेमी^{2}	
		88 सेमी

3. खालिल सारणीमध्ये काही आयताची मापे दिली आहेत. तथापि ती अपुर्ण आहेत गाळलेली माहिती शोधा.

लांबी	रूंदी	क्षेत्रफळ	परिमिती
20 सेमी	14 सेमी		
	12 सेमी		60 सेमी
15 सेमी		150 सेमी	

13.1 समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ

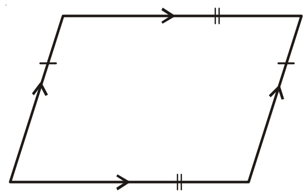


Figure 1

आकृती 1 मधील आकार बघा. ती समांतरभुज चौकोन आहे. आता आपण त्याचे क्षेत्रफळ कसे काढतात हे शिकू या

कृती 1

- एका कागदावर एक समांतरभूज चौकोन काढा.
- तो समांतरभूज चौकोन कापून घ्या.

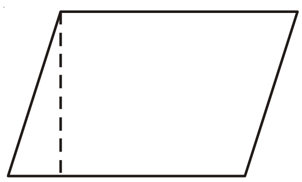


Figure 2

- आता आकृती 2 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे समांतरभूज चौकोन टिंब असलेल्या रेषेने कापून घ्या आणि कागदाच्या त्रिकोणाकृती आकाराचा तुकडा वेगळा करा.

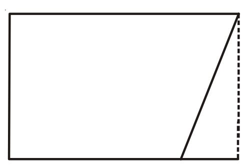
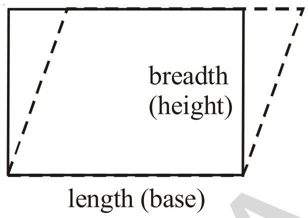


Figure 3

- आकृती 3 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे तो त्रिकोणाचा तुकडा दुस-या बाजूने लावा आणि ते दोनही टुकडे एक आयत तयार करतात का ते बघा.

आकृती 2 मध्ये असलेल्या समांतरभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ आणि आकृती 3 मध्ये असलेल्या आयताचे क्षेत्रफळ आहे असे आपण म्हणू शकतो का ? आपल्याला हे खरे असल्याचे दिसून येईल.

वरील कृतीतून आपल्याला असे दिसून आले की, समांतरभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे आयताच्या क्षेत्रफळा एवढेच असते. आपल्याला माहित आहे की,



आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी ह्न रूंदी

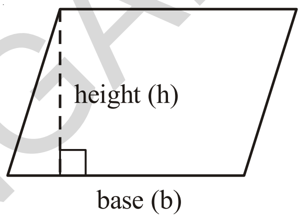
आपल्याला हे सूद्धा माहित आहे की,

आयताची लांबी ही समांतरभूज चौकोनाच्या पाया एवढी असते आणि आयताची रूंदी ही समांतरभूज चौकोनाच्या उंचीएवढी असते.

म्हणून, समांतरभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = आयताचे क्षेत्रफळ

= लांबी ह्न रूंदी

= पाया ह्न उंची (लांबी = पाया; रूंदी = उंची)

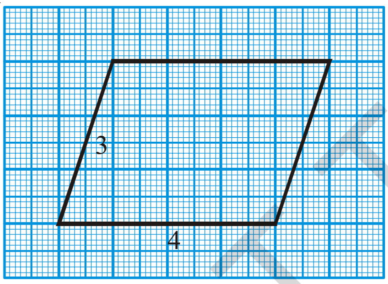


अशाप्रकारे समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे त्याचा पाया आणि संगत उंचीच्या गुणाकाराएवढे असते.

ते म्हणजे क्षेत्रफळ = पाया ह्न उंची

उदाहरण 1 : प्रत्येक समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

(i)



उत्तर : समांतरभूज चौकोनाचा पाया (b) = 4 एकक

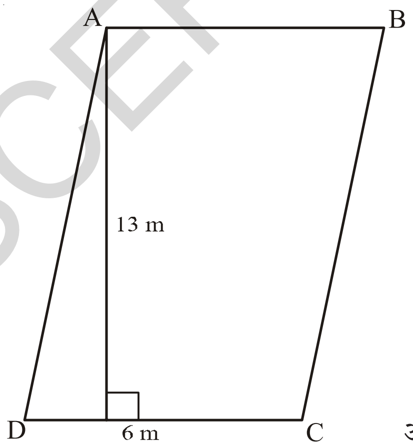
समांतरभुज चौकोनाची उंची = 3 एकक

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ (A) = पायाह्न उंची

म्हणून $A = 4 \times 3 = 12$ चौ. एकक

अशाप्रकारे समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 12 चौ. एकक आहे.

(ii)



उत्तर :

समांतरभुज चौकोनाचा पाया (b) = 6 मी.

समांतरभुज चौकोनाची उंची (h) = 13 मी.

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ (A) = पाया ह्न उंची

म्हणून $A = 6 \times 13 = 78\ m^2$

अशाप्रकारे समांतरभुज चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ 78 चौ.मी.[2]

सरावासाठी :

ABCD हा एक समांतरभूज चौकोन असून त्याच्या बाजू 8 सेमी आणि 6 सेमी आहेत. आकृती 1 मध्ये समांतरभुज चौकोनाचा पाया किती ? उंची किती, समांतरभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ किती ? आकृती 2 मध्ये समांतरभुज चौकोनाचा पाया किती ? उंची किती ? समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ किती ?

आकृती 1 आणि आकृती 2 चे क्षेत्रफळ समान आहे काय ?

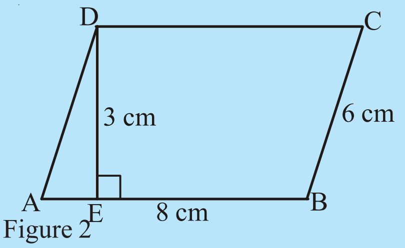


Figure 2

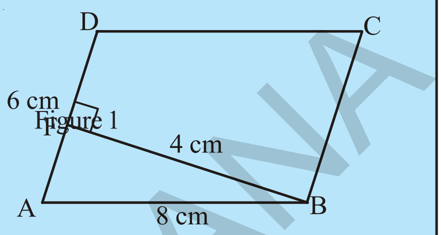
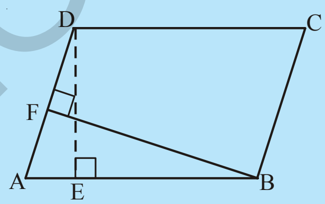


Figure 1

समांतरभुज चौकोनाच्या कोणत्याही बाजूची आपण या म्हणून निवड करू शकतो.

आकृती 1 मध्ये रेषा DE ही रेषा AB वर काढलेला लंब आहे. तेव्हा AB हा समांतरभुज चौकोनाचा पाया आणि DE ही उंची आहे.

आकृती 2 मध्ये, रेषा BF ही रेषा AD वर काढलेला लंब आहे. तेव्हा AD हा पाया तर BF ही उंची आहे.



सरावासाठी

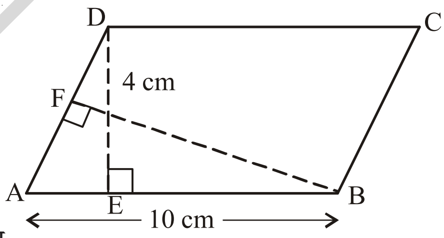
1. समांतरभुज चौकोन ABCD मध्ये

AB = 10 सेमी आणि

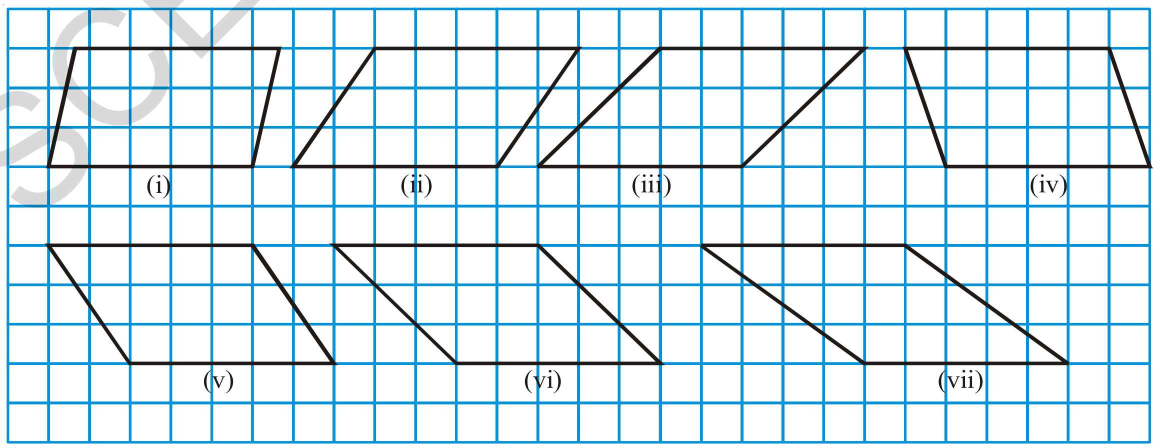
DE = 4 सेमी असेल तर ;

(i) ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.

(ii) जर AD = 6 cm असेल तर BF काढा,



2. खालील समांतरभुज चौकोनाचा नीट अभ्यास करा.

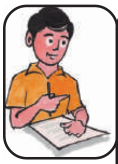


(i) प्रत्येक समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ त्यांच्यात समाविष्ट असलेल्या चौरसाच्या संख्येवरून शोधा. अपूर्ण चौरस पूर्ण करण्यासाठी आणखी दुसऱ्या अपूर्ण चौरस आहे का ते शोधा आणि दोन अपूर्ण चौरस मिळून एक पूर्ण चौरस प्रत्येक समांतरभूज चौकोणात तयार करा.

खालील सारणी याप्रमाणे पूर्ण करा.

समांतरभूज चौकोन	पाया	उंची	क्षेत्रफळ	चौरसाची संख्या मोजून क्षेत्रफळ		
				पूर्ण चौरसाची संख्या	अर्ध्या(अपुर्ण) चौरसाची संख्या	एकू ण चौरस (पूर्ण)
(i)	5 एकक	3 एकक	$5 \times 3 = 15$ चौ.एकक	12	6	15
(ii)						
(iii)						
(iv)						
(v)						
(vi)						
(vii)						

(ii) समान पाया आणि समान उंची असलेल्या समांतरभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ समान असेल काय?



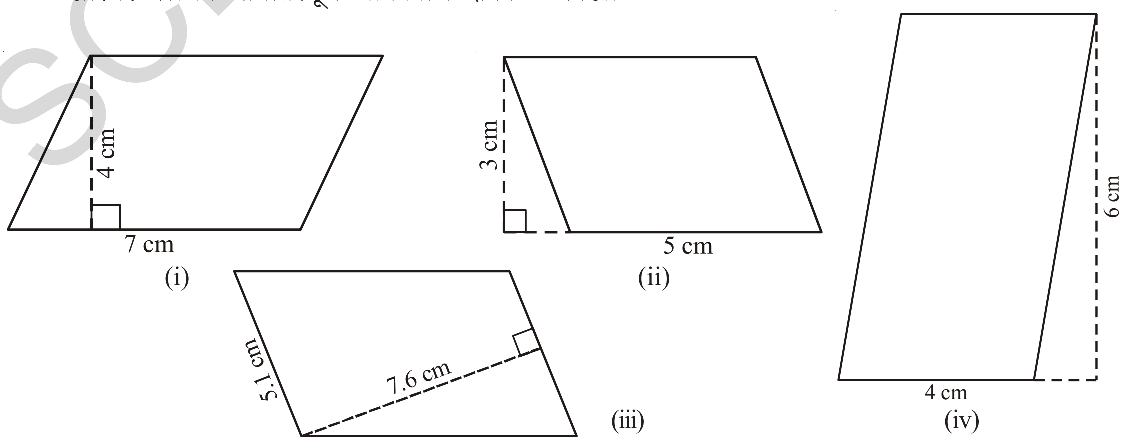
सरावासाठी

(i) आयताचे क्षेत्रफळ शोधण्यासाठीचे सूत्र समांतरभुज क्षेत्रफळ शोधण्यासाठीच्या सूत्राशी का संबंधित आहे ?

(ii) आयत हा समांतरभूज चौकोन असतो परंतू समांतरभूज चौकोन आयत असेलच असे नाही. स्पष्ट करा.

स्वाध्याय - 2

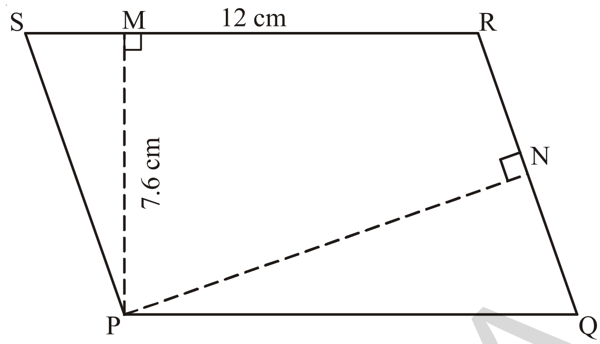
1. खालील प्रत्येक समांतरभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.



2. PQRS हा एक समांतरभूज चौकोन आहे. PM ही रेषा असलेली P पासूनची उंची आहे. आणि रेषा PN ही

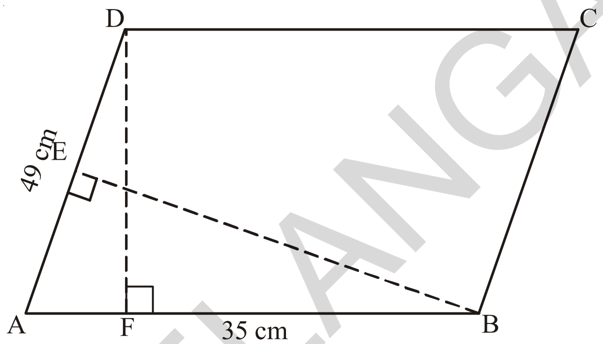
$\overline{QR}$ ला लंब असलेली रेषा PN ही P पासूनची उंची आहे.

जर SR = 12 सेमी आणि PM = 7.6 सेमी असेल तर



(i) PQRS या समांतरभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ किती ?

(ii) जर QR = 8 सेमी तर PN किती ?



3. समांतरभुज चौकोन ABCD मध्ये AB आणि AD हया अनुक्रमे बाजू DF आणि BE च्या उंची आहेत. जर समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 1470 सेमी^{2} असेल AB = 35 सेमी आणि AD = 49 सेमी असतील तर बाजू BE आणि DF ची लांबी किती ?

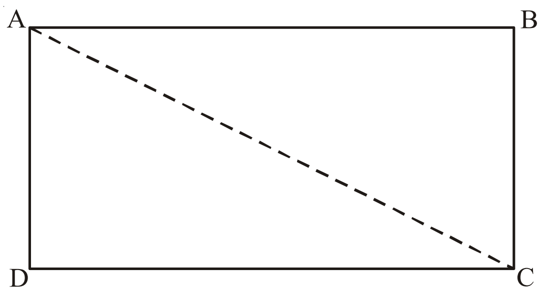
4. एका समांतरभुज चौकोनाची उंची त्याच्या पायाच्या एक तृतीयांश आहे. जर समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 192 सेमी^{2} असेल तर त्याची उंची आणि पाया किती ?

5. एका समांतरभूज चौकोनाच्या पाया आणि उंचीचे गुणोत्तर 5 : 2 आहे. जर समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 360 मी^{2} असेल तर त्याचा पाया आणि उंची किती ?

6. एका चौरसाचे आणि एका समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ सारखेच आहे. जर चौरसाची बाजू 40मी असेल आणि समांतरभुज चौकोनाची उंची 20 मी असेल तर समांतरभूज चौकोनाचा पाया किती ?

13.2 त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

13.2.1 त्रिकोण हे आयताचे भाग असतात.



एक चौरस काढा. आयताला त्याच्या दोन त्रिकोण मिळण्यासाठी आयताच्या कर्णांला एका टोकापासून दुसऱ्या टोकापर्यंत कापा. एक त्रिकोण दुसऱ्या त्रिकोणावर ठेवा. ते क्षेत्रफळाने अगदी समान आहेत ? आपण असे म्हणू शकतो का ? की ते त्रिकोण एकरूप आहेत. ?

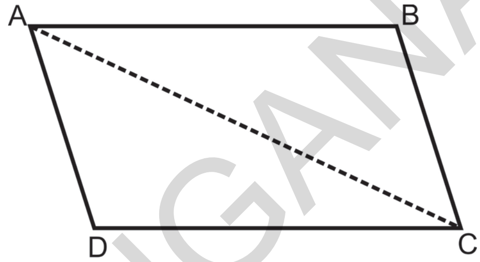
आपल्याला ते दोन्ही त्रिकोण एकरूप असल्याचे आढळून येईल. अशाप्रकारे आयताचे क्षेत्रफळ हे दोन त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाच्या बेरजेएवढे असते.

म्हणून प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ $\frac{1}{2}$ ह्व (आयताचे क्षेत्रफळ)

$= \frac{1}{2}$ ह्व(लांबी (l) ह्वरूंदी (b)= lb

13.2.2 त्रिकोण हे समांतरभुज चौकोनाचे भाग असतात.

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एक समांतरभुज चौकोन तयार करा. समांतरभुज चौकोनाच्या कर्णाला एका टोकापासून दुस-या टोकापर्यंत कापा. तुम्हाला दोन त्रिकोण मिळतील. ते त्रिकोण एकमेकांवर ठेवा काय ते आकाराने (क्षेत्रफळाने) अगदी समान आहेत ?



तुम्हाला असे आढळून येईल की, समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे दोन्ही त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाएवढे आहे.

आपल्याला माहित आहे की, समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ

$\frac{1}{2}$ पायाह्वउंची

म्हणून प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ ह्व(समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ)

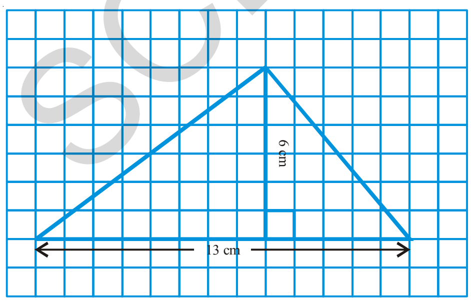
त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ (पायाह्वउंची)

$= \frac{1}{2}$ ह्व पाया (b)ह्वउंची (h) = bh

अशाप्रकारे, त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या पाया **(b)** आणि **(h)** उंचीच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते. ते म्हणजे

$$\mathbf{A = \frac{1}{2}\, bh}$$

उदाहरण 2 : त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.



उत्तर : त्रिकोणाचा पाया (b) = 13 सेमी

त्रिकोणाची उंची (h) = 6 सेमी

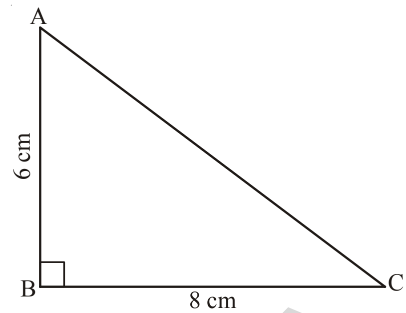
त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (A) = $\frac{1}{2}$ (पायाह्वउंची) किंवा $\frac{1}{2}$ bh

म्हणून $A = \frac{1}{2} \times 13 \times 6$

$= 13 \times 3 = 39 \text{ cm}^2$

अशाप्रकारे त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 39 सेमी^{2} आहे.

उदाहरण 3 : ΔABC चे क्षेत्रफळ काढा.



उत्तर : त्रिकोणाचा पाया (b) = 8 सेमी

त्रिकोणाची उंची (h) = 6 सेमी

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (A) = $\frac{1}{2}$ bh

म्हणून $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ सेमी^{2}

अशाप्रकारे त्रिकोण ΔABC चे क्षेत्रफळ = 24 सेमी^{2}

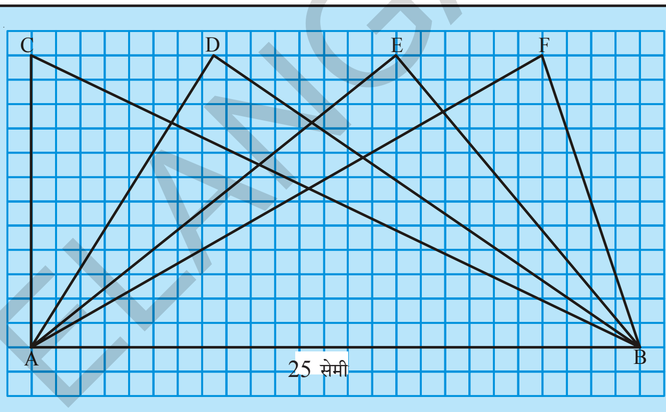
काटकोन त्रिकोणाच्या दोन्ही बाजू त्याच्या उंची असू शकतात हे लक्षात ठेवा.

सरावासाठी

या आकृतीतील सर्व त्रिकोण हे पाया AB = 24 सेमी वर आहेत पाया AB वर काढलेल्या प्रत्येक त्रिकोणाची उंची सारखीच आहे का ?

प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ असेल काय ? तुमच्या उत्तराच्या समर्थनार्थ कारणे द्या.

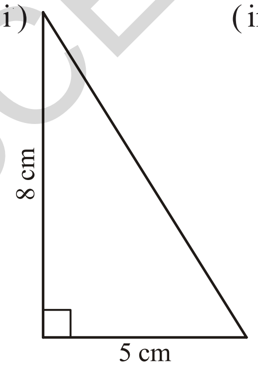
त्रिकोण एकरूप सुद्धा आहेत का ?



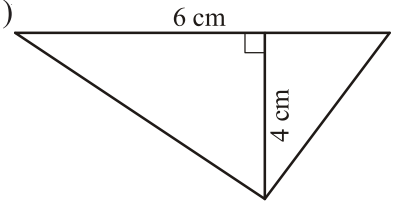
स्वाध्याय - 3

1. खालिल प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

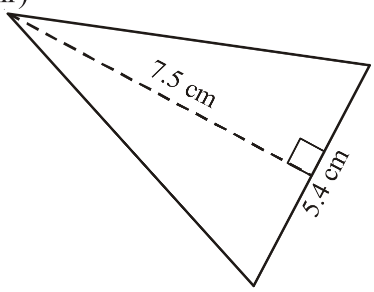
(i)



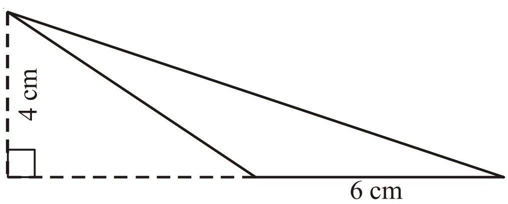
(ii)



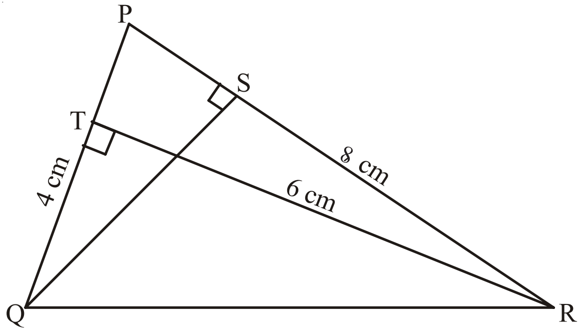
(iii)



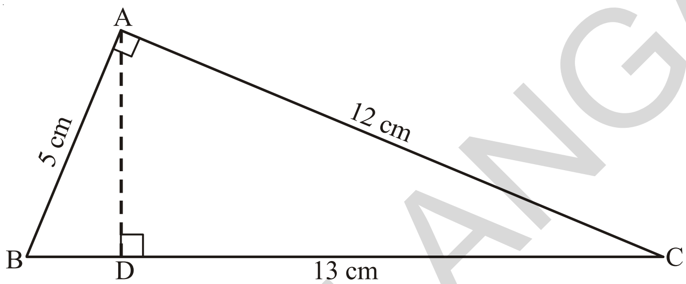
(iv)



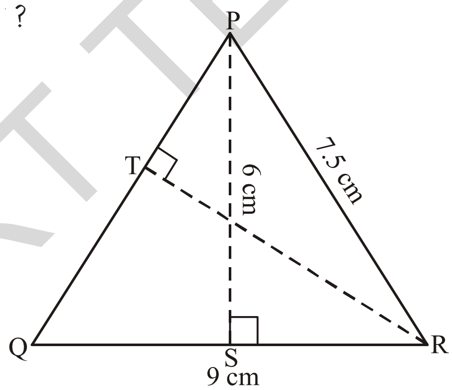
2. ΔPQR मध्ये $PQ = 4$ सेमी, $PR = 8$ सेमी आणि $RT = 6$ सेमी तर (i) ΔPQR चे क्षेत्रफळ किती? (ii) बाजू QS ची लांबी किती ?



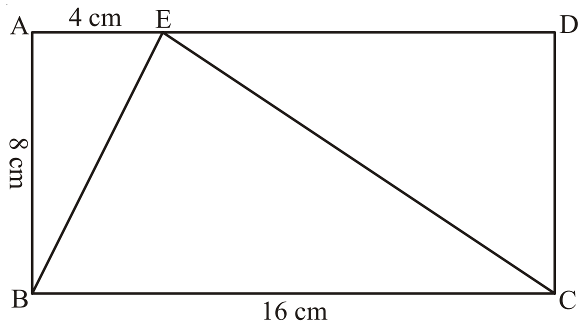
3. ΔABC मध्ये $A = 90^0$ AD हा BC चा लंबदुभाजक असून $AB = 5$ सेमी $BC = 13$ सेमी आणि $AC = 12$ सेमी आहे तर ΔABC चे क्षेत्रफळ किती ? बाजू AD ची लांबी किती ?



4. ΔPQR हा समद्विभुज त्रिकोण असून $PQ = PR = 7.5$ सेमी आणि $QR = 9$ सेमी. P पासून QR वर काढलेल्या लंब PS ची उंची 6 सेमी आहे. ΔPQR चे क्षेत्रफळ काढा. तसेच R पासून PQ वर काढलेल्या लंब RT ची उंची किती ?

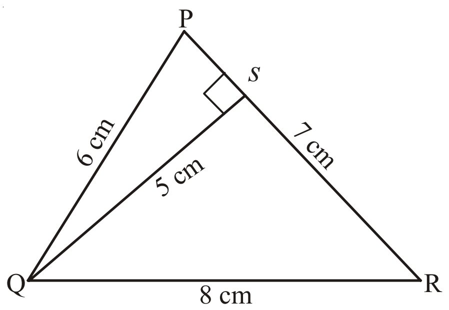


5. आयत ABCD मध्ये $AB = 8$ सेमी $BC = 16$ सेमी आणि $AE = 4$ सेमी. ΔBCE चे क्षेत्रफळ किती ? ΔBEC चे क्षेत्रफळ हे ΔBAE आणि ΔCDE च्या क्षेत्रफळाच्या बेरजेएवढे आहे काय? का ?



6. रामू म्हणतो की, ΔPQR चे क्षेत्रफळ $A = \frac{1}{2} \times 7 \times 5$ सेमी^{2} आहे.

गोपी म्हणतो की, $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5$ सेमी^{2} . कोण बरोबर आहे ? का ?

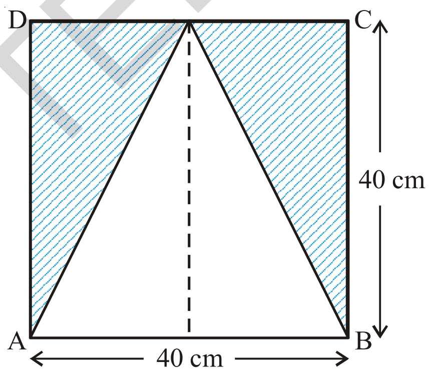


7. एका त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 220 सेमी^{2} आणि उंची 11सेमी^{2} आहे तर त्याचा पाया किती ?

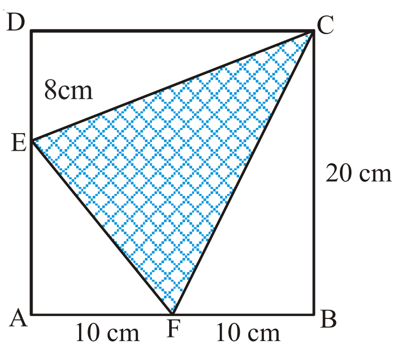
8. एका त्रिकोणाची उंची ही पायाच्या दुप्पट असून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 400 सेमी^{2} आहे तर त्रिकोणाचा पाया आणि उंची किती ?

9. एका त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे एका आयताच्या क्षेत्रफळाएवढे आहे ज्यांची लांबी आणि रूंदी अनुक्रमे 20 सेमी आणि 15 सेमी आहे. जर त्रिकोणाच्या पाया 30 सेमी असेल तर त्रिकोणाची उंची काढा.

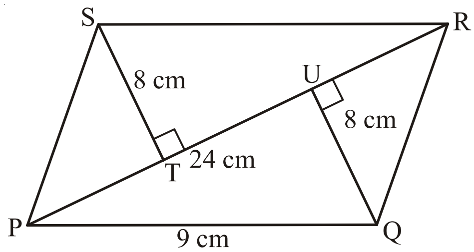
10. आकृती ABCD मधील छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



11. आकृती ABCD मधील छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ काढा.



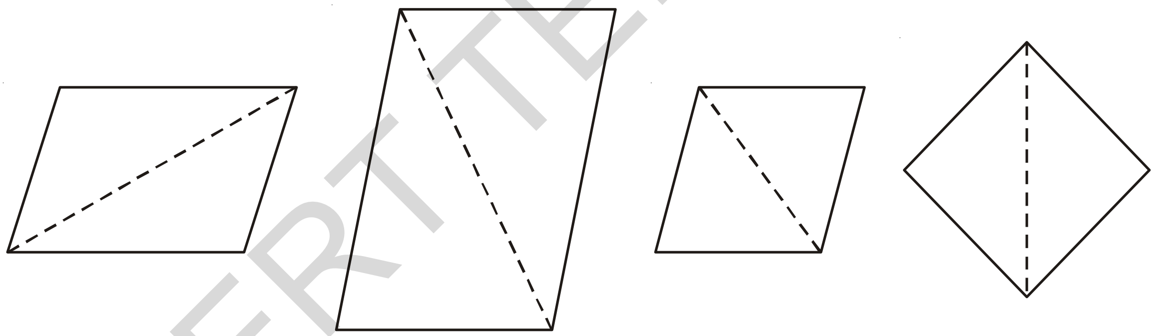
12. समांतरभुज चौकोन PQRS मध्ये PR = 24 सेमी आणि QU = ST = 8 सेमी असेल तर समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ किती ?



13. एका त्रिकोणाचा पाया आणि उंची यांचे गुणोत्तर 3 : 2 असून त्याचे क्षेत्रफळ 108 सेमी^{2} आहे तर त्या त्रिकोणाचा पाया आणि उंची किती ?

13.3 समभुज चौकोन

संतोष आणि अखिला चांगले मित्र आहेत. त्यांना पेपर कट - आऊट्स - बरोबर खेळायला आवडते एके दिवशी संतोषने वेगवेगळे त्रिकोणाकृती आकार अखिलाला दिले. त्यापासून तिने समांतरभूज चौकोनाचे वेगवेगळे आकार तयार केले हे समांतरभूज चौकोन खाली दिले आहेत.



संतोषने अखिलाला विचारले, ‘‘कोणत्या समांतरभूज चौकोनाच्या 4 बाजू समान आहेत?’’

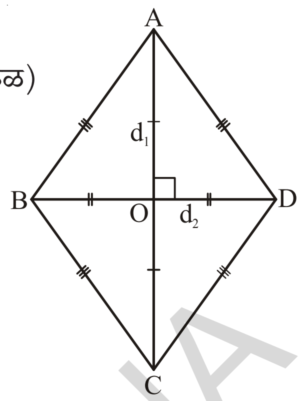
अखिला म्हणाली, ‘‘शेवटच्या दोन आकृत्यांच्या बाजू समान आहेत.’’

संतोष म्हणाला, **‘‘जर एखाद्या समांतरभुज चौकोनाच्या सर्व बाजू समान (सारख्या) असतील तर त्यास समभुज चौकोन असे म्हणतात.’’**

आता आपण समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ कसे काढतात हे शिकू या.

समांतरभुज चौकोन आणि त्रिकोणामध्ये बघितलेल्या बाबीप्रमाणे आपण समभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी एकरूप त्रिकोणात घटकांची विभागणी करण्याच्या पद्धतीचा उपयोग करू शकतो.

ABCD हा एक समभुज चौकोन आहे.



समभुज चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ = (ΔACD चे क्षेत्रफळ) (ΔACB चे क्षेत्रफळ)

$$= \left(\frac{1}{2} \times AC \times OD\right) + \left(\frac{1}{2} \times AC \times OB\right)$$

कर्ण काटकोनात दुभागतात.

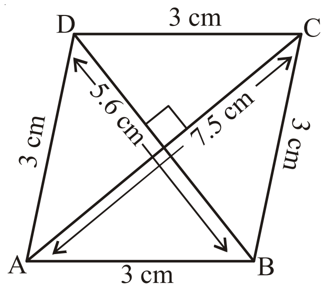
$$= \frac{1}{2} AC \times (OD + OB)$$

$$= \frac{1}{2} AC \times BD$$

$$= \frac{1}{2} d_1 \times d_2 \text{ (येथे } AC = d_1 \text{ आणि } BD = d_2)$$

दुसऱ्या शब्दांत समभुज क्षेत्रफळ हे त्याच्या कर्णांच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} d_1 d_2$$



उदाहरण 4 : समभुज चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ किती ?

उत्तर : कर्ण एकची लांबी (d_1) = 7.5 सेमी

दुस-या कर्णाची लांबी (d_2) = 5.6 सेमी

समभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ (A) $= \frac{1}{2} d_1 d_2$

म्हणून A $= \frac{1}{2} \times 7.5 \times 5.6 = 21$ सेमी^{2}

अशाप्रकारे समभूज चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ = 21 सेमी^{2}

उदाहरण 5 : एका समभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 60 सेमी^{2} असून त्याचा एक कर्ण 8 सेमी आहे. तर दुसऱ्या कर्णांची लांबी शोधा.

उत्तर : एका कर्णाची लांबी (d_1) = 8 सेमी

दुस-या कर्णाची लांबी = d_2

समभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

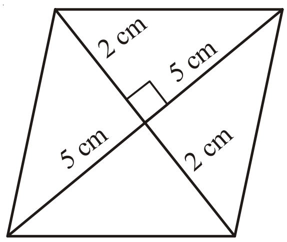
म्हणून, 60 $= \frac{1}{2} \times 8 \times d_2$

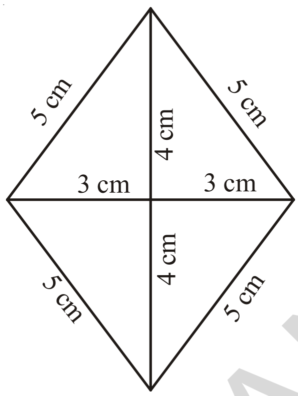
d_2 = 15 सेमी

अशाप्रकारे दुसऱ्या कर्णांची लांबी 15 सेमी आहे.

स्वाध्याय 4

1. खालील समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.





2. गाळलेल्या किंमती शोधा.

कर्ण--1 (d_1)	कर्ण--2 (d_2)	समभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ
12 सेमी	16सेमी	
27 मीमी		2025 मीमी^{2}
24 मी	57 सेमी	

3. 24 सेमी कर्णांची लांबी असलेल्या एका समभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 216 चौ.मी.आहे. तर त्याच्या दुसऱ्या कर्णांची लांबी शोधा.

4. एका इमारतीचा मजला समभूज चौकोनाकृती आकाराच्या 3000 टाईल्सनी बनलेला आहे प्रत्येक टाईल्सचे कर्ण 45सेमी आणि 30 सेमी आहेत.जर प्रतिमीटर मी^{2} पॉलिर्शींगचा 25 रुपये खर्च असेल तर संपूर्ण मजला पॉलिश करण्यासाठी किती खर्च येईल.

13.4 वर्तुळ परीघ

नझिया सायकलच्या टायर सोबत खेळत आहे. ती टायरला काठीने फिरवत/ढकलत आहे. आणि त्याच्यासोबत पळत आहे.

एका परिभ्रमणात (स्वत:भोवती फिरण्याने) तो टायर किती अंतर कापेल ?

एका परिभ्रमणात टायरने कापलेले अंतर हे त्या टायर भोवतीच्या चाकाच्या

लांबीएवढे असेल. टायर भोवतीच्या लांबीला सुद्धा त्या टायरचा परीघ असे म्हणतात.

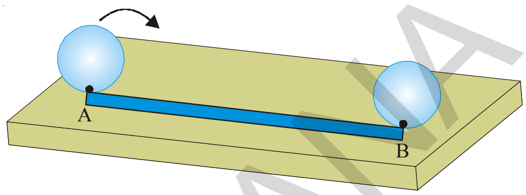
टायरने कापलेले एकूण अंतर आणि टायरची परिभ्रमण संख्या यांच्यामध्ये काय संबंध असेल.

टायरने कापलेले एकूण अंतर = परिभ्रमण संख्या ह्व टायरभोवतीची लांबी

कृती 2

ज्याने एका पुठ्ठ्यातून एक वर्तुळाकृती आकार कापला त्या आकाराला (कार्डाला) सुशोभित करण्यासाठी तिने त्याच्याभोवती एक लेस चिपकवला. अशाप्रकारे तिला हव्या असलेल्या लेसची लांबी ही त्या कार्डच्या परीघाएवढी आहे. त्या कार्डाला परीघ ती रूलरच्या (पट्टीच्या) मदतीने मोजू शकेल काय ?

जयाने काय करू शकेल ?



जयाने टेबलवर एक रेषा काढली आणि तिचा सुरूवातीचा बिंदू A. असा नोंद केला. नंतर तिने कार्डाच्या कडेवर एक बिंदू घेतला. तिने तो वर्तुळाकृती कार्डावरील बिंदू रेषेवर अशाप्रकारे ठेवला की तो तंतोतंत गडगडत/घरंगळत नेले जोपर्यंत त्या कार्डावरील बिंदू रेषेला स्पर्श करणार नाही. तिने त्या बिंदूला B असे नाव दिले. रेषा AB ची लांबी म्हणजेच त्या वर्तुळाकृती कार्डाची परीघ होय अंतर AB म्हणजेच त्या कार्डाला लावण्यासाठी आवश्यक असलेल्या लेसची लांबी.

सरावासाठी

बॉटलचे झाकण,बांगडी किंवा इतर कोणत्याही वर्तुळाकृती वस्तू घ्या.
आणि दोऱ्याच्या सहाय्याने तिचा परीघ काढा.

वरील पद्धतीने प्रत्येक वर्तुळाकारी आकाराचा परीघ काढणे सोपे नाही. यासाठी आपल्याला दुसऱ्या पद्धतीने काढावे लागेले वर्तुळाचा व्यास आणि परीघ यांच्यामध्ये काही संबंध आहे का, हे आपण बघू या.

एका मनुष्याने पुठ्ठ्याच्या साहायाने 6 निरनिराळ्या त्रिज्या असलेली वर्तुळे तयार केली आणि दोऱ्याच्या सहाय्याने त्यांचा परीघ काढला. त्याने प्रत्येक वर्तुळाचा परीघ आणि व्यास यांच्यामध्ये असलेले गुणोत्तर शोधून काढले.

त्याने त्याचे निरीक्षण खालील सारणीत नोंदविले.

वर्तुळ	त्रिज्या	व्यास	परीघ	परीघ आणि व्याचे याचे गुणोत्तर
1.	3.5 सेमी	7.0 सेमी	22.0 सेमी	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 सेमी	14.0 सेमी	44.0 सेमी	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 सेमी	21.0 सेमी	66.0 सेमी	
4.	21.0 सेमी	42.0 सेमी	132.0 सेमी	
5.	5.0 cm	10.0 cm	32.0 cm	
6.	15.0cm	30.0 cm	94.0 cm	

वरील सारणीवरून तुम्ही कोणते अनुमान काढू शकता ? प्रत्येक वर्तुळाचा परीघ आणि व्यास यामधील गुणोत्तर जवळजवळ सारखेच आहे का? वर्तूळाचा परीघ नेहमीच वर्तूळाच्या व्यासाच्या तिप्पट असतो, असे आपण म्हणू शकतो काय ?

एखाद्या वतुर्ळाचा परीघ आणि व्यास यांच्या गुणोत्तराची किंमत जवळजवळ $\frac{22}{7}$ किंवा 3.14 असते.

ही किंमत स्थिर असते आणि ती π (pi) या चिन्हाने दर्शवितात.

म्हणून $\frac{c}{d} = \pi$ येथे 'c' वर्तुळाचा परीघ आणि 'd' वर्तुळाचा व्यास

त्याअर्थी $\frac{c}{d} = \pi$

$c = \pi d$

त्याअर्थी वर्तुळाचा व्यास त्रिज्येच्या दुप्पट असतो. तो म्हणजे $d = 2r$

$c = \pi \times 2r$ किंवा $c = 2\pi r$

अशाप्रकारे वर्तुळाचा परीघ = πd or $2\pi r$

उदाहरण 6 : 10 सेमी. व्यास असलेल्या वर्तुळाचा परीघ काढा. (घ्या $\pi = 3.14$)

उत्तर : वर्तुळाचा व्यास (d) = 10 cm.

वर्तुळाचा परीघ (c) = π d

$= 3.14 \times 10$

c = 31.4 सेमी

अशाप्रकारे वर्तुळाचा परीघ 31.4 सेमी

उदाहरण 7 : 14 सेमी त्रिज्या वर्तुळाचा परीघ काढा. (घ्या $\pi = \frac{22}{7}$)

वर्तुळाची त्रिज्या (r) = 14 cm

वर्तुळाचा परीघ (c) = $2\pi r$

म्हणून c $= 2 \times \frac{22}{7} \times 14$

c = 88 cm

अशाप्रकारे वर्तुळाचा परीघ 88 सेमी.

स्वाध्याय - 5

1. खालिल वर्तुळांचा परीघ काढा ज्यांची त्रिज्या -

   (i) 35 सेमी (ii) 4.2 सेमी (iii) 15.4 सेमी

2. खालील वर्तुळांचा परीघ काढा ज्यांचा व्यास -

   (i) 17.5 सेमी (ii) 5.6 सेमी (iii) 4.9 सेमी

   टिप : वरील दोन्ही प्रश्नांमध्ये $\pi = \frac{22}{7}$ आहे.

3. (i) π = 3.14 घेऊन पुढील वर्तुळांचा परीघ काढा. ज्यांची त्रिज्या

   (a) 8 सेमी (b) 15 सेमी (c) 20 सेमी

   (ii) एका वर्तुळाचा परीघ 44 सेमी आहे तर त्याची त्रिज्या किती ?

4. एका वर्तुळाचा परीघ 264 सेमी असेल तर त्याची त्रिज्या किती ? घ्या $\pi = \frac{22}{7}$

5. एका वर्तुळाचा परीघ 33 सेमी असेल तर त्याचा व्यास किती ?

6. 35 सेमी त्रिज्या असलेले चाक 660 से. मी. अंतर कापण्यासाठी किती वेळा रोटेट होईल.

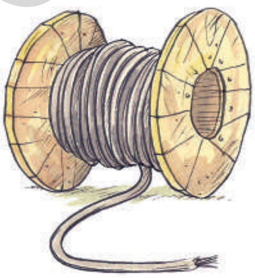
   (घ्या $\pi = \frac{22}{7}$).

7. दोन वर्तुळाच्या व्यासाचे गुणोत्तर 3 : 4 असल्यास त्यांच्या परीघाचे गुणोत्तर काय असेल ?

8. एका रोड रोलरला 2200 मी. अंतर कापण्यासाठी 200 रोटेशन (फेऱ्या) घ्यावी लागतात. तर त्या रोलरच्या चाकाची त्रिज्या किती ?

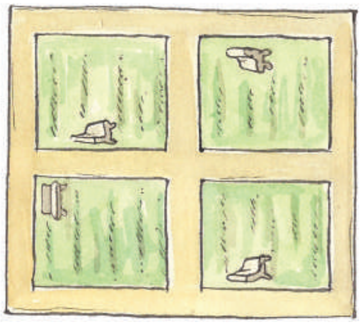
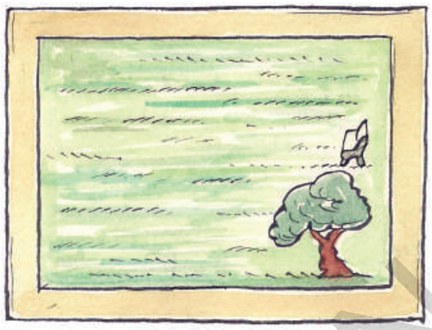
9. एका वर्तुळाकृती घडयाळाचा मिनिट काटा 15 सेमी लांब आहे.

   एका तासात मिनिट काट्याचे टोक किती अंतर पार करेल ? (घ्या π = 3.14)



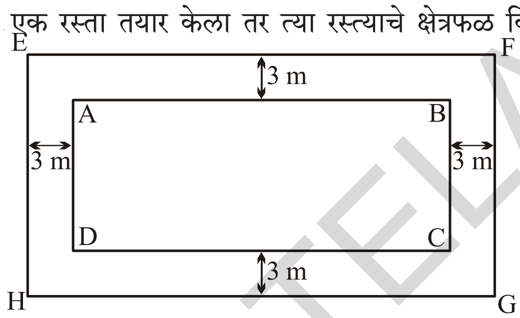
10. 25 सेमी त्रिज्या असलेला वायरचा एका वर्तुळाची गड्डा केला आहे. तो सरळ करून त्यापासून एक चौरस तयार केला तर त्या चौरसाच्या बाजूची लांबी किती असेल ?

13.5 आयताकृती रस्ते

बगीच्यामध्ये आपण अशाप्रकारे रस्ते पार करून नेहमीच जात असतो. आता आपण त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ कसे काढतात हे शिकू या, जेणेकरून ते रस्ते तयार करण्यासाठी किती खर्च येणार आहे हे आपल्याला कळेल.

उदाहरण 8 : एका जमिनीची लांबी 60 मी आणि रूंदी 40 मी आहे. त्या जमिनीभोवती उभा रूंदीचा एक रस्ता तयार केला तर त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ किती ?



उत्तर : ABCD ही दिलेली जमिन आहे. उभा रूंदीचा रस्ता त्या जमिनीभोवती आहे. त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी आपल्याला मोठ्या आयताच्या EFGH च्या क्षेत्रफळातून लहान आयत ABCD चे क्षेत्रफळ वजा करावे लागेल.

आतील आयताची लांबी	=	60 मी
आतील आयताची रूंदी	=	40 मी
जमिन ABCD चे क्षेत्रफळ	=	(60 x 40) मी^{2}
	=	2400 मी^{2}
रस्त्याची रूंदी	=	3 मी
बाहेरील आयताची लांबी	=	60 मी + (3+3) मी
	=	66 मी
बाहेरील आयताची रूंदी	=	40 मी + (3+3) मी
	=	46 मी

बाहेरील आयताचे क्षेत्रफळ = 66 x 46 मी^{2}

= 3036 मी ^{2}

म्हणून रस्त्याचे क्षेत्रफळ = (3036 - 2400) मी^{2}

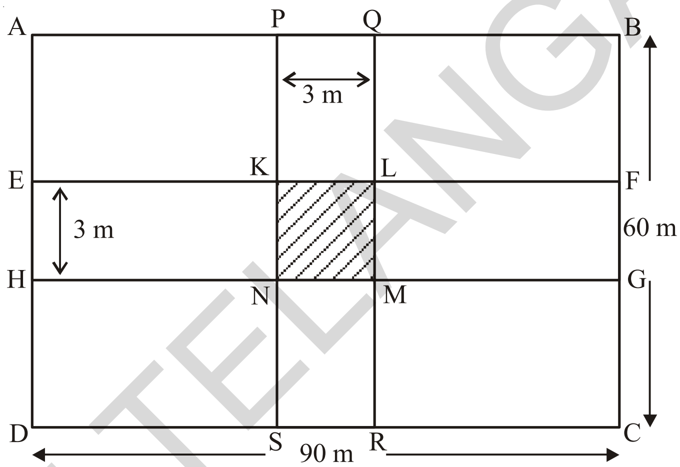
= 636 मी^{2}

उदाहरण 9 : एका आयताकृती शेताचे आकारमान 90 मी आणि 60 मी आहे. शेताच्या बाजूंना समांतर असणारे आणि एकमेकांना शेताच्या मध्यभागी छेदणारे दोन रस्त बांधण्यात आले. जर प्रत्येक रस्त्याची रूंदी 3 मी असेल तर –

(i) रस्त्याने व्यापलेले क्षेत्रफळ किती ?

(ii) ₹ 110 प्रति मी^{2} दराने रस्त्याचे बांधकाम करण्यासाठी किती खर्च येईल

उत्तर : समजा ABCD हे आयताकृती शेत आहे. PQRS आणि EFGH हे 3 मीटर रस्ते आहेत.



(i) छेदणाऱ्या रस्त्यांचे क्षेत्रफळ म्हणजे आयत PQRS आणि आयत EFGH चे क्षेत्रफळ होय आकृतीतून हे स्पष्ट होते की, चौरस KLMN चे क्षेत्रफळ आपण दोन वेळा घेतले आहे. म्हणून आपल्याला ते एकदा कमी करण्याची आवश्यकता आहे.

प्रश्नातून आपल्या लक्षात येते की,

PQ = 3 मी, आणि PS = 60 मी

EH = 3 मी, आणि EF = 90 मी

KL = 3 मी आणि KN = 3 मी

रस्त्यांचे क्षेत्रफळ = आयत PQRS चे क्षेत्रफळ + आयत EFGH चे क्षेत्रफळ – चौरस KLMN चे क्षेत्रफळ

$= (PS \times PQ) + (EF \times EH) - (KL \times KN)$

$= (60 \times 3) + (90 \times 3) - (3 \times 3)$

$= (180 + 270 - 9)\ m^2$

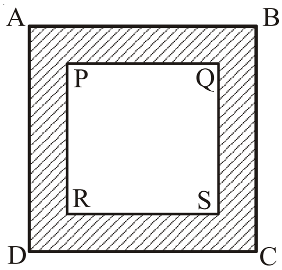
$= 441\ m^2$

(ii) बांधकामाचा खर्च $= ₹110 \times$ मी^{2}

रोड बांधकामाचा खर्च $= 110 \times 441$

$= ₹. 48,510$

उदाहरण 10 : 100 मी. बाजू असलेल्या एका चौरसाकृती बागेभोवती एक 5 मी रूंदीच्या रस्ता आहे. त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ किती ? त्या रस्त्याला र 250 प्रति 10मी^{2} दराने सिमेंटचा थर देण्यासाठी किती खर्च होईल.



उत्तर : PQRS हा 100 मी. बाजू असलेल्या चौरसाकृती बाग आहे. छायांकीत भाग हा 5 मी. रूंदीचा रस्ता दाखवितो.

AB ची लांबी $= 100 + (5 + 5) = 110$ मी

चौरस PQRS चे क्षेत्रफळ = (बाजू)^2 = (100 मी)^2 = 10000 मी^{2}

चौरस ABCD चे क्षेत्रफळ = (बाजू)^2 = (110 मी)^2 = 12100 मी

रस्त्याचे क्षेत्रफळ = $(12100 - 10000) = 2100$ मी^{2}

प्रति 10मी^{2} रस्त्याला सिमेंटचा थर देण्यासाठी खर्च = ₹. 250

म्हणून 1 मी^{2} रस्त्याला सिमेंटचा थर देण्यासाठीचा खर्च $= \frac{250}{10}$

अशाप्रकारे 2100 मी^{2} रस्त्याला सिमेंटचा थर देण्यासाठीचा खर्च $= \frac{250}{10} \times 2100$

$= ₹. 52,500$

स्वाध्याय - 6

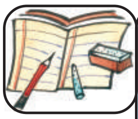
1. 45 मी बाजू असलेल्या एका चौरसाकृती शेताभोवती 2.5 मी. रूंदीचा एक रस्ता आहे. तर त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ किती ?

2. एका शाळेच्या मध्यवर्ती सभागृहाची लांबी 18 मी आणि रूंदी 12.5 मी आहे 50 मी रूंदीची भिंतीजवळील पट्टी अनाच्छादीत सोडून जमिनीवरील एका गलिच्याचे क्षेत्रफळ किती तसेच अनाच्छादीत भागाचे क्षेत्रफळ किती ?

3. एका चौरसाकृती गवताळ जमिनीच्या बाजूची लांबी 80 मी आहे. प्रत्येकी 4 मीटर रूंदीच्या दोन पायवाटा जमिनीच्या बाजूला अशाप्रकारे समांतर बांधल्या आहेत की, त्या एकमेकींना जमिनीच्या मध्यभागी छेदतील तर त्या पायवाटांचे क्षेत्रफळ किती ?

4. 8मी ह्न 5मी आकारमानाच्या एका पूर्ण खोलीभोवती 2 मी रूंदीचा एक व्हरांडा बांधला तर त्या व्हरांडयाचे क्षेत्रफळ किती ?

5. एका आयताकृती बागेची लांबी 700मी आणि रूंदी 300 मी आहे त्या बागेच्या बाजूंना समांतर असलेले प्रत्येकी 10मी रूंदीचे परस्परांना छेदणारे दोन रस्ते आयताकृती बागेच्या मध्यभागी छेदतात तर रस्त्यांचे क्षेत्रफळ काढा. परस्परांना छेदणाऱ्या रस्त्यांचे क्षेत्रफळ सोडून (वगळून) बागेचे क्षेत्रफळ काढा.



पाठ्यावलोकन

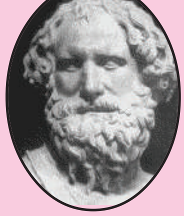
- समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे त्याचा पाया (b) आणि लगतची उंची (h) यांच्या गुणाकाराएवढे असते. ते म्हणजेच $A = bh$ समांतरभूज चौकोनाची कोणतीही बाजू पाया म्हणून घेता येते.
- त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ हे त्याच्या पाया (b) आणि उंचीच्या (h) गुणाकाराच्या निम्मे असते.

  ते म्हणजेच $A = \frac{1}{2}\ bh.$
- समभूज चौकोनाचे क्षेत्रफळ हे त्याच कर्णाच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते.

  ते म्हणजेच $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\ d_1 d_2.$
- वर्तूळाचा परीघ $= 2\pi r$ येथे r त्रिज्या(वर्तुळाची)आणि

  $\pi = \frac{22}{7}$ किंवा 3.14

आर्किमीडीज (ग्रीस)
(287-212 इ.स. पूर्वी)
यांनी π ची किंमत सर्व प्रथम शोधून काढली.
त्याचबरोबर गणितातील वर्तुळातील क्षेत्रफळ काढण्याचे सूत्रसुद्धा शोधून काढले.



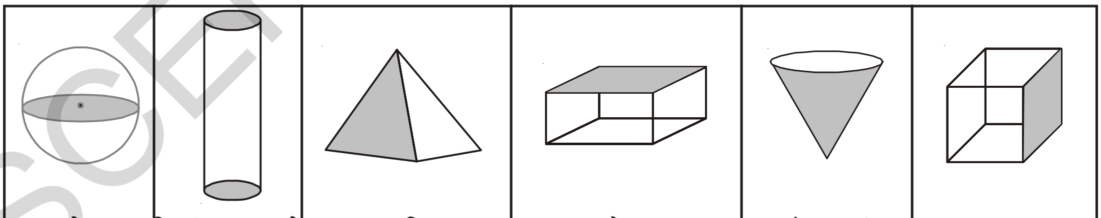
2D आणि 3D आकाराचे आकलन 14

14.0 प्रस्तावना

आपण इयत्ता सहावीत त्रिमीत (3 डी) आकृत्यांची माहिती घेतली तसेच त्याबद्दल शिकलोत. याही वर्षात आपण आणखी काही आकृत्या जसे चेहरे, कोन, भूमितीय आकृत्यांची उजळणी करून घेऊ.

स्वाध्याय - 1

1. खाली दिलेल्या विविध आकृत्यांची विभागणी त्या खालील तक्त्यात करा. आकृत्यांच्या आकारावरून विभागणी अपेक्षित आहे. तसेच त्यांना नावेही द्या.



गोल	सिलींडर प्रमाणे	पॅरामिड	चौरस	शंकाकृती	घन

2. कोणत्याही 2 वस्तूची नावे लिहा ज्या विविध आकाराच्या आहेत व त्या आपण दैनंदिन जीवनात रोज वापरत असतो. आणि त्या 3D आकाराच्या असतील खालील तक्ता पूर्ण करा.

(i) शंकाकृती ----------- ----------- ----------- -----------

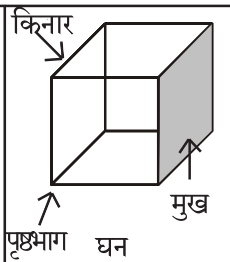
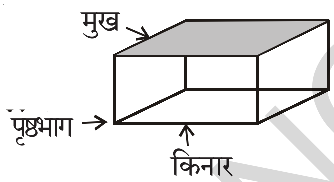
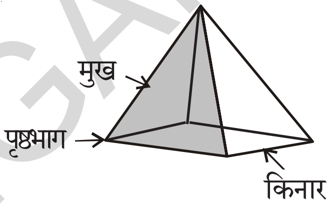
(ii) घन ----------- ----------- ----------- -----------

(iii) चौरस ----------- ----------- ----------- -----------

(iv) गोल ----------- ----------- ----------- -----------

(v) सिलीडर प्रमाणे ----------- ----------- ----------- -----------

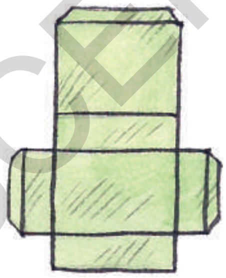
3. खालील आकृत्यांच्या किनार, पृष्ठभाग, मूख इत्यादिची ओळखा.

	 घन	 आयत	 पिरॅमीड
किनार			
पृष्ठभाग			
मुख			

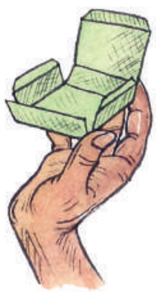
14.1 3-D आकाराच्या जाळ्या

आता आपण आपल्या डोळ्यासमोर 3-D आकाराच्या व 2-D आकाराच्या आकृत्या आणूत ज्या की, जाळयाच्या आकारात असतात.

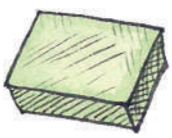
काही कार्टून घ्या त्या बॉक्स जे किनार कट करा व त्यांच्या आउट लाईन काढा जे खालील आकृत्यात आहेत.



आकृती 1

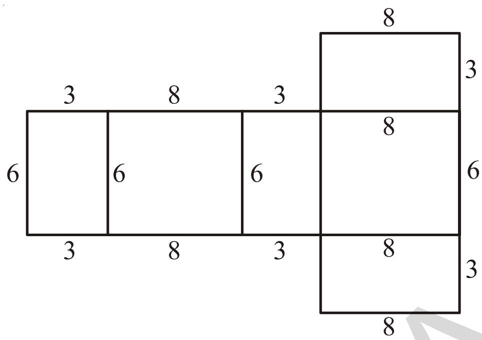


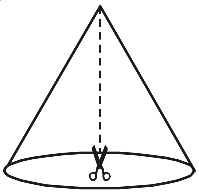
आकृती 2



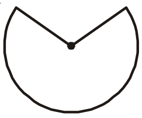
आकृती 3

यासाठी येथे बॉक्स नमुना दिला आहे.
ते चिकटविण्याचा प्रयत्न करा.
आणि त्यांच्या घड्या घाला.





आकृती 1



आकृती 2

त्याचप्रमाणे आइसक्रिमचे कव्हर घ्या व त्यांना आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे कापा.
आणि तुम्हाला जाळ्यांचा आकार मिळेल.

सरावासाठी

विविध आकाराच्या वस्तू घ्या त्यांना कट करा व आपत्या मित्रांना ते ओळखण्यास सांगा.

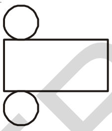
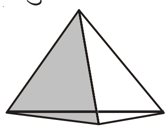
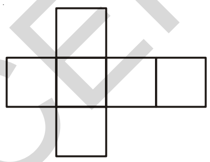
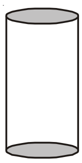
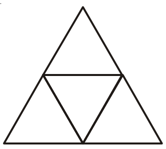
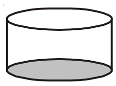
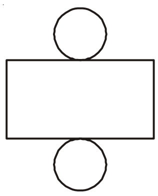
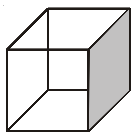
तुम्ही विविध कृतीतून विविध आकाराच्या आकृत्या पाहिल्यात एकाच आकृतीला अनेक आकारात कापता येतात.

स्वाध्याय - 2

1. काही आकार दिले आहेत ते काढा आणि आरेखन कागदावर चिपकवा आणि त्यांचा 3-D आकार काढण्याचा प्रयत्न करा. नंतर त्याची जुळवणी करा.

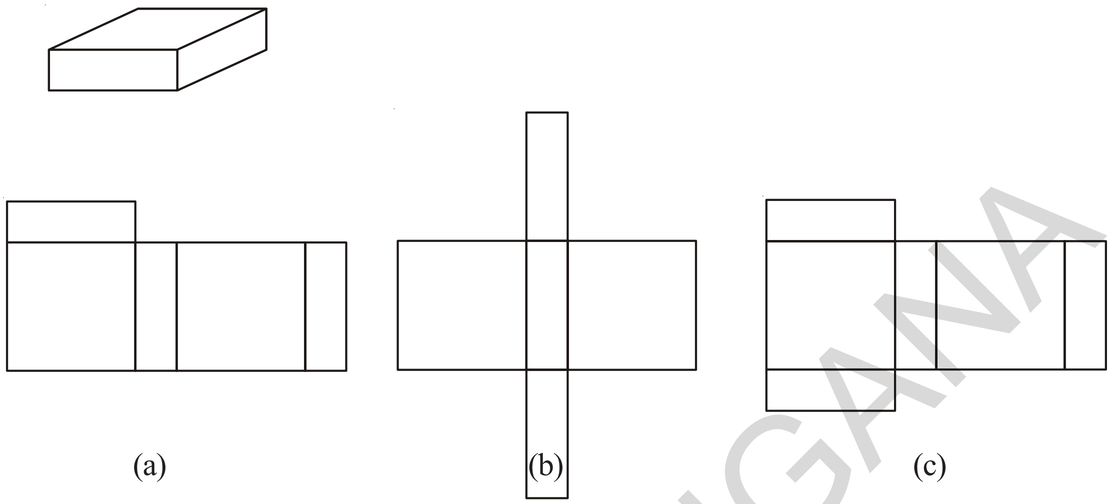
नेट	**3D** आकार

2. 3-D चे काही संच खाली दिलेले आहेत. योग्य आकाराशी जोडी जुळवा.

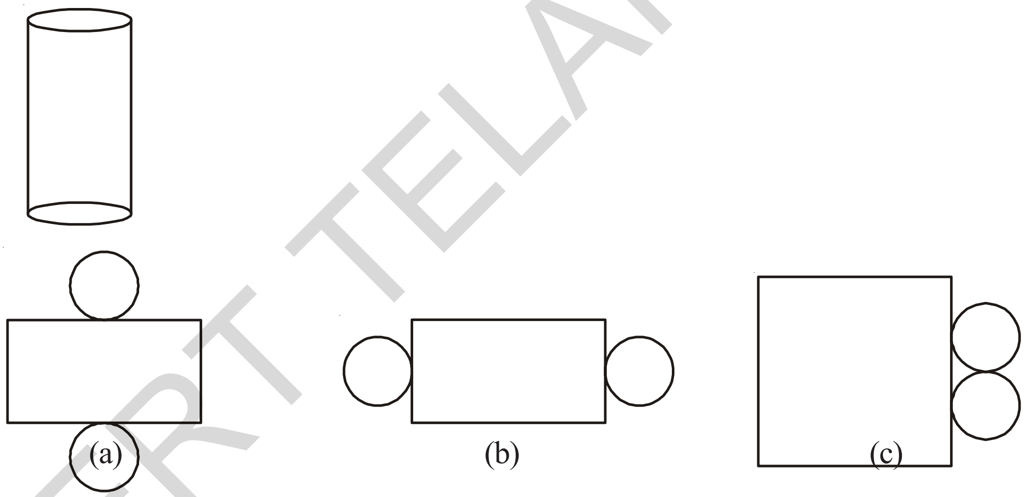
2. 3-D चे काही संच खाली दिलेले आहेत. योग्य आकाराशी जोडी जुळवा.

(i)



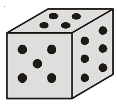
(a) (b) (c)

(ii)



(a) (b) (c)

3. फासा जो घन असून त्यावर काही ठिपके दिले आहेत.
आणि ते एकमेकाच्या विरुद्ध असून एकूण सात आहेत.



येथे दोन जाळे दिले असून त्यात योग्य ठिपके भरा.

हा खेळ खेळा

तुम्ही आणि तुमचा मित्र एकमेकाच्या पाठीमागे तोंड करून बसा 3-D च्या आकाराचे एक जण वाचन करा. दुसरा त्या चित्राचे वर्णन करा.

14.2 सपाट पृष्ठभागावर घनाकृती काढा

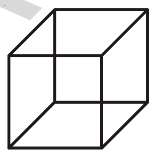
सपाट पृष्ठभाग असलेल्या पेपरवर जेव्हा तुम्ही घनाकृती काढता तेव्हा ती आकृती कशी दिसते. यासाठी तुम्हाला दोन तंत्र वापरावे लागतील तेच तुम्हाला 3-D काढण्यासाठी मदत होईल

14.2.1 तिरकस आकृती काढणे

येथे घनाकृतीची आकृती दिली आहे. यावरून आपणाला योग्य युक्ती मिळते

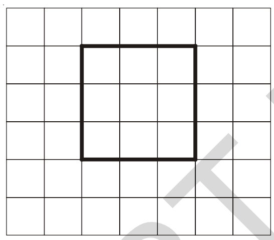
त्याच्या साऱ्या बाजू आपणाला दिसतात काय. या चित्रात साऱ्या बाजू सारख्या

दिसत नाही. याच्या साऱ्या बाजू समान नाहीत. तुम्ही त्याचा घन सांगू शकता काय ?

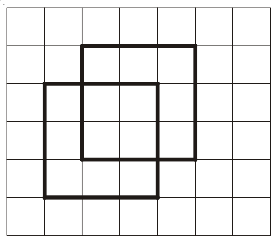


अशाच आकृत्यांना तिरकस आकृती असे म्हणतात.

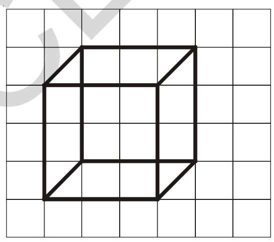
अशा आकृत्या तुम्ही कशा काढाल ? तर यासाठी काही तंत्र आपण शिकू या. एका कागदावर काही ठिपके काढा जसे की, (3ह्न3ह्न3) प्रत्येकी 3 एकका प्रमाणे.



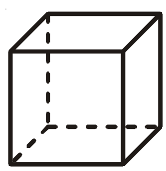
कृती 1
समोरील भाग काढा



कृती 2
मागील भाग काढा



कृती 3
दोन्ही भागाना जोडा



कृती 4
न दिसणारा भाग दाखविण्यासाठी टिंबटिब काढा

वरील तिरकस आकृत्यावरून आपल्याला काय जाणवेल

(i) समोरा समोरील भागसारखे दिसतात.

(ii) किनारा वगैरे सारखेच घनाकृती दिसतात. यावरून तुम्ही तिरकस आकृती काढण्याचा प्रयत्न करा.(लक्षात ठेवा ह्या आकृत्या आयाताकृती असतात.)

आता तुम्ही आयताकृती आकाराचे एक छायांकित आरेखन करा.

पण लक्षात ठेवा की, त्यातील पृष्ठभाग हा त्रिकोणाकृती असावा.

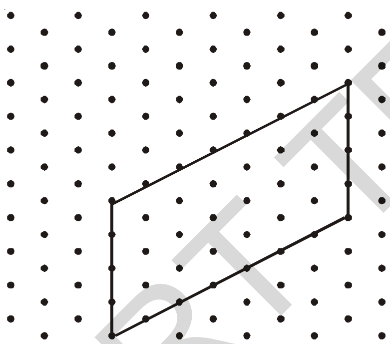
आता तुम्ही खाली दिलेल्या घनआकृतीचा मोजमापयुक्त आरेखन करून

अशी आकृती काढा की जी, तिरकस दिसेल.

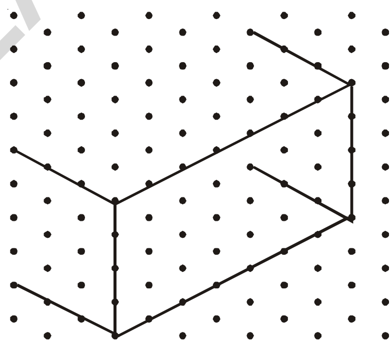
आता प्रयत्न करू या की, ज्याचा व्यास 7 सेमी लांब, रुंदी 3 सेमी, उंची 4 सेमी असेल

14.2.2 समभुद्विभूज चौकोन काढणे.

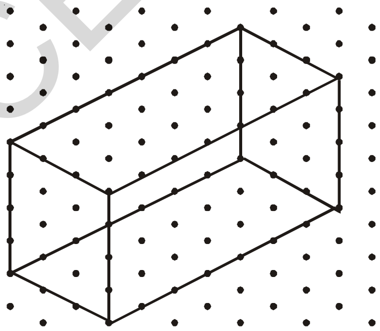
आता तुम्ही घनाकृती आकृती काढण्याचा प्रयत्न करा की, ज्याचा व्यास 4ह्व3ह्व3 असेल म्हणजेच किनारे, पृष्ठभाग आणि क्षेत्रफळ याचे गुणोत्तर 7, 3, 4 एकक असावे.



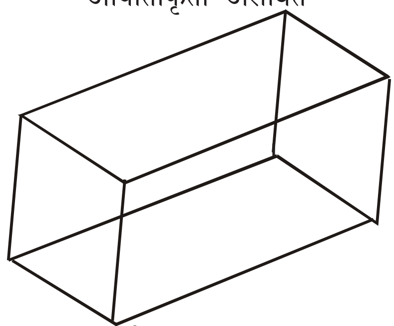
कृती 1
समोरील बाजू दिसण्यासाठी आयात काढा



कृती 2
चार समातंर रेषा काढा ज्यांची लांबी 3 सेमी असावी व ते आयाताकृती असावेत



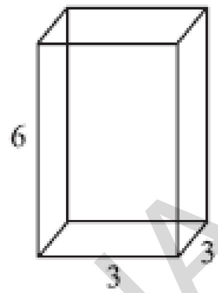
कृती 3
सर्व कोने जोडा जे की, सारखे आहेत



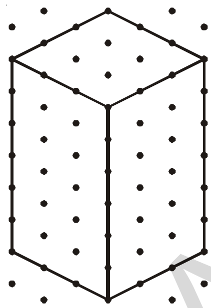
कृती 4
हिच आकृती समद्विभुज चौकोनाची आहे.

नोंद घ्या की,या घनाकृतीत मापे ही तंतोतंतच घ्यावी लागतात.

उदाहरण 1 : या ठिकाणी एक घनाकृती दिली आहे. त्यासारखीच आकृती काढा .



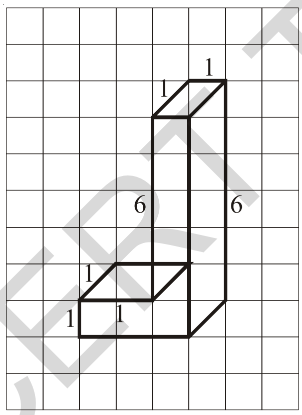
उत्तर : मापे अनुक्रमे लांबी, रूंदी, उंची 3, 3, आणि 6 आहेत.



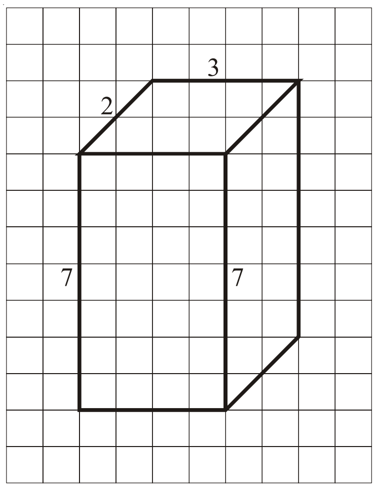
स्वाध्याय - 3

1. समभुज आकाराच्या ठिपकाच्या साहाय्याने खालील आकाराच्या आकृत्या काढा.

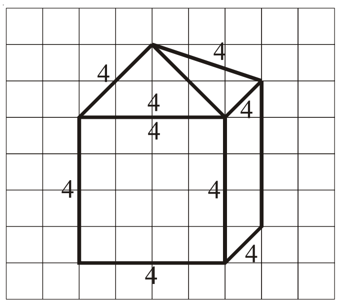
(i)



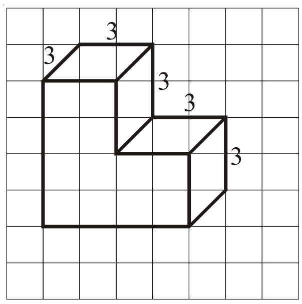
(ii)



(iii)



(iv)

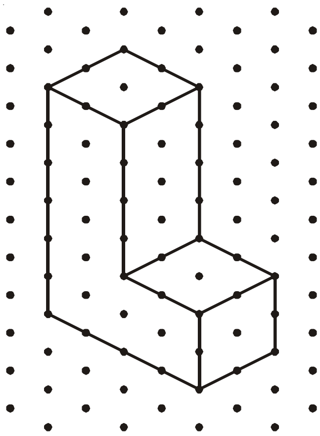


2. धनाकृतीचा व्यास 5 सेमी,3 समी,आणि 2 सेमी असलेल्या तीन आकृत्या काढा.

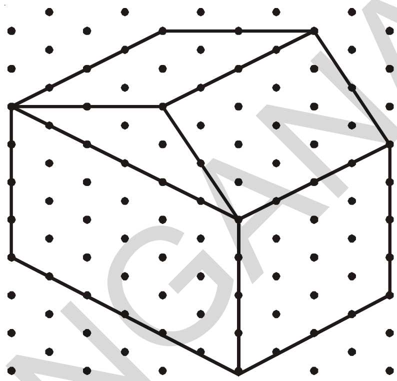
3. ज्याचा काठ 3 सेमी असा घन काढा. तिरकस आकृती काढा.

4. समान असलेल्या प्रत्येक आकृतीसाठी आकार द्या.

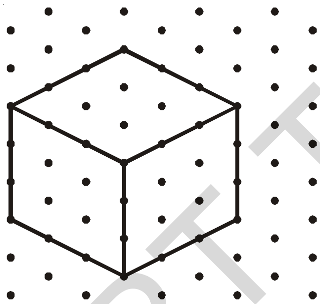
(i)



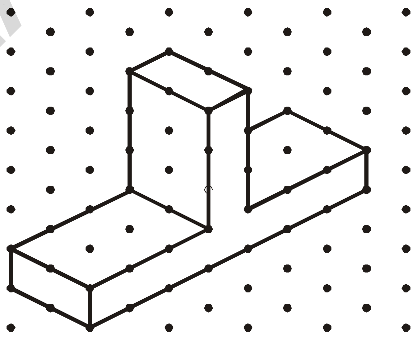
(ii)



(iii)



(iv)



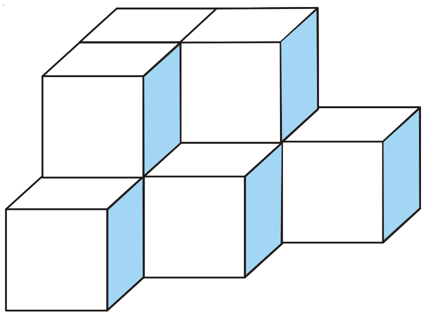
5. खालील आकृत्यांना तिरकस आणि समभुज आकार द्या.

(a) घनाकृतीचा व्यास 5, 3,आणि 2 सेमी प्रत्येकी.

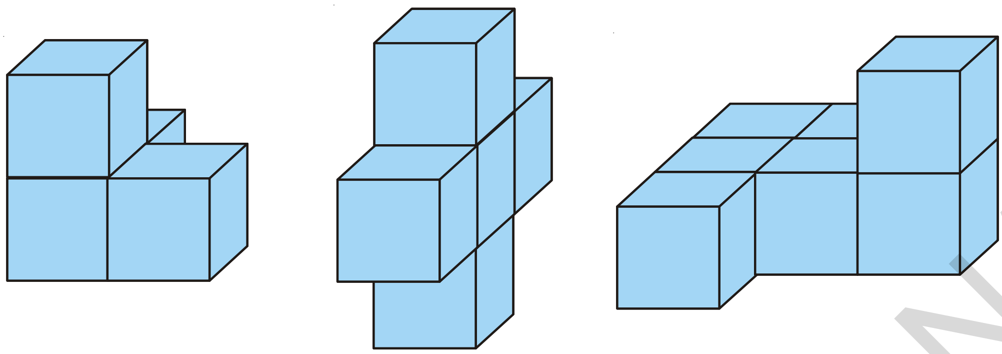
(b) एक घन काढा ज्याचा किनार 4 सेमी लांबीचा असावा.

14.3 दृष्टीक्षेपात दिसणाऱ्या घनाकृती

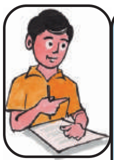
काही वेळा जेव्हा तुम्ही काही जोडलेल्या वस्तू पाहता, त्या आपल्या दृष्टीसमोर येत नाहीत.



या ठिकाणी काही कृती दिल्या आहेत ज्यातून आपल्याला काही बाजू दिसत नाहीत त्यांचे निरीक्षण करा.

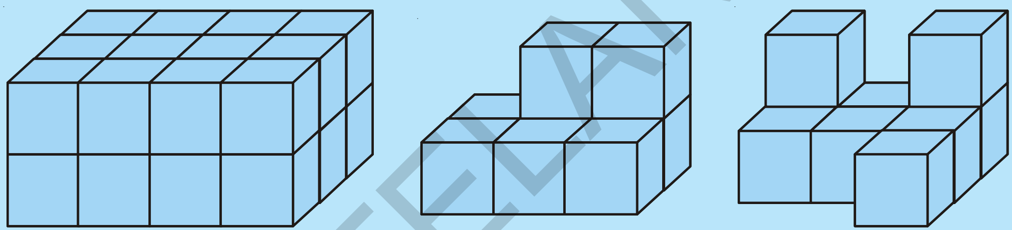


आता तुमच्या मित्राला तर्क लावायला सांगा की, सर्व घन आपल्याला रचता येतील काय ?



सरावासाठी

खालील घनाची रचना करा.



ह्या आकृत्या अतिशय महत्त्वाच्या आहेत.

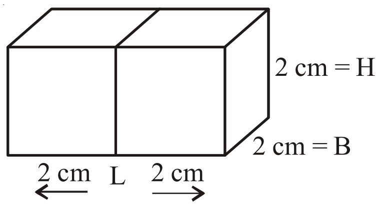
समजा तुम्ही तुम्ही जोडलेल्या घनाकृती आकृत्या जर घेतल्या तर तुम्ही त्यांची लांबी, रूंदी, उंची मोजू शकता.

उदाहरण 2 : जर दोन घन ज्याचा व्यास 2 सेमी, 2 सेमी, 2 सेमी प्रत्येकी तर त्या घनाचा व्यास कसा काढाल?

उत्तर : जेव्हा आपण त्यांच्या बाजू घेतल्या तर त्या 2 ने वाढत जातील.

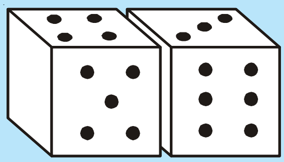
म्हणजेच 2 + 2 = 4 cm.

म्हणून रूदी 2 सेमी आणि उंची 2 सेमी आहे.



म्हणून, रुंदी = 2 सेमी आणि उंची = 2 सेमी

सरावासाठी



1. दोन फासे आकृत्या वेगवेगळया दिशेने आकृत्यात दाखविल्याप्रमाणे ठेवा. त्यांचे तोंड एकमेकाविरुद्ध असायला पाहीजे.

   (i) 5 + 6   (ii) 4 + 3

   (लक्षात ठेवा की,फासाच्या विरूध्द अंकाची बेरीज 7 आहे.)

2. तीन घन ज्याचे किनार 2 सेमी असेल तर तुम्ही प्रयत्न करा की, त्यांच्या लांबी, रुंदी, उंची काय असतील. ते रेखाटा

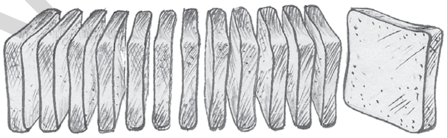
14.3.1 घनाकृतीचे विविध भाग दिसणे.

आता पाहू या वस्तूचे 3-D आकार कसे दिसतात.

14.3.1a) वस्तू कापल्यानंतर दाखविणे

One way to view an object is by cutting or slicing the object

पात्यांचा खेळ



या ठिकाणी आपणाला पावाचे काही तुकडे दाखविले आहेत.

जे की, चाकूच्या साहाय्याने कापले आहेत. जेव्हा तुम्ही याला आडवे कापाल तेव्हा त्याची आकृती चौरसाची दिसेल. यालाच आपल्याला पावाचा आडवा छेद म्हणता येईल.

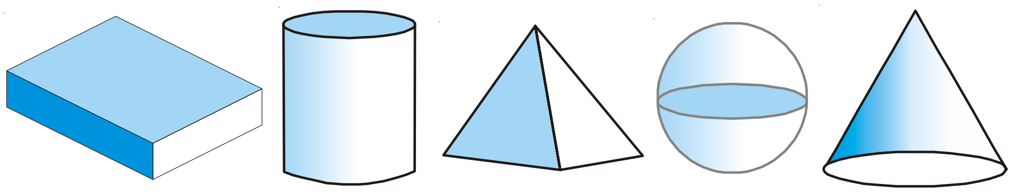
लक्षात ठेवा, जेव्हा तुम्ही पावाला उभे कापाल तर त्याच्या भागाचा विचार करा की तो कसा दिसेल.

स्वंयपाकगृहातील खेळ

या ठिकाणी आपण अनेक भाज्यांचा आडवा छेद बघू या. ते स्वयंपाकासाठी वापरतात. असे अनेक तुकडे घेउन त्याचे निरीक्षण करा.

सरावासाठी

मातीचे किंवा प्लास्टीकचे भांडी बनवा त्यांच्या आडव्या व उभ्या छेदाचा अभ्यास करा. आकृती काढण्याचा प्रयत्न करा.



2. खालील वस्तूच्या जेव्हा तुम्ही आडवा व उभा छेद कापल्यावर कोणत्या आकृत्या मिळतील.?

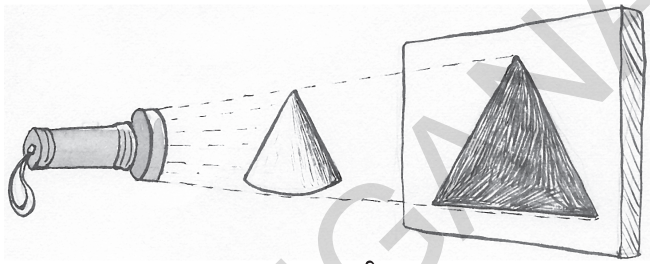
अ) विट ब) गोल सफरचंद क) शिक्का ड) गोलकार पाईप इ) आईसक्रिमचा कोन

14.3.1b) छायांकित भागाच्या खेळाचा दुसरा मार्ग

सावलीचा खेळ

3-D आकृत्या काढण्याचा चांगला मार्ग म्हणजे सावली होय.

कोणतीही वस्तू आपल्याला 2-D च्या आकाराची दिसते.



आकृती 1

तूम्ही सावलीचा खेळ कसा खेळाल ? यासाठी तुम्हाला

घनरूप वस्तू घ्याव्या लागतील. ह्याच आकृत्या आपल्याला गणितात उपयोगी पडतील.

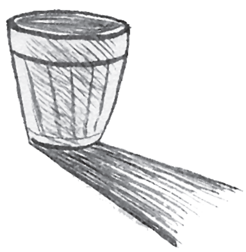
अशा कृतीसाठी आपणाला प्रकाशाची गरज आहे. जर तुमच्याकडे प्रोजेक्टर असेल तर त्या वस्तू त्यावर ठेवा आणि दिवा लावून पाहा.

कोनाच्या उजव्या बाजूस दिवा पकडा. वरील आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे दिसेल काय ?

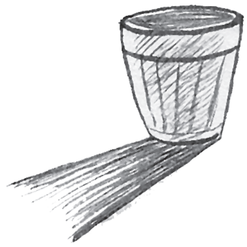
3डी विषयी काय दाखवू शकता ?

जर कोनाच्या समोर प्रकाश पाडून वरील खेळ खेळ खेळा काणत्या प्रकारची आकृती दिसेल दुपारच्या वेळी गोल डबा घ्या व तो उन्हात ठेवा जसे की, आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे.

अ) दुपारी दिसणारी आकृती



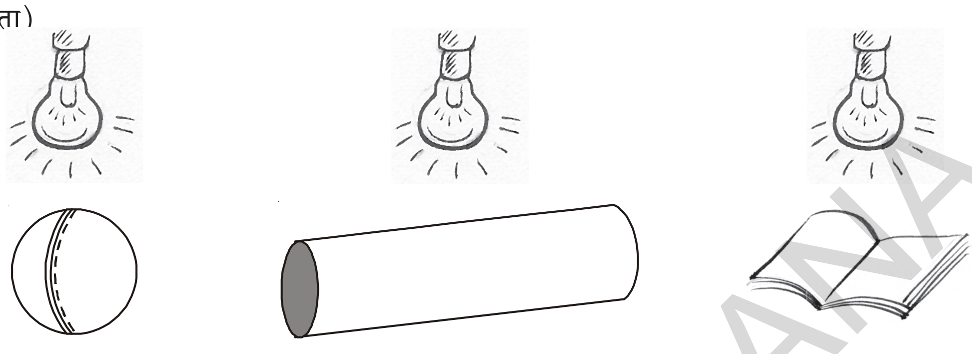
ब) सांयकाळी दिसणारी आकृती



सूर्य व त्यांच्या सावलीचा अभ्यास करा व वेळेचे निरिक्षण करा.

स्वाध्याय - 4

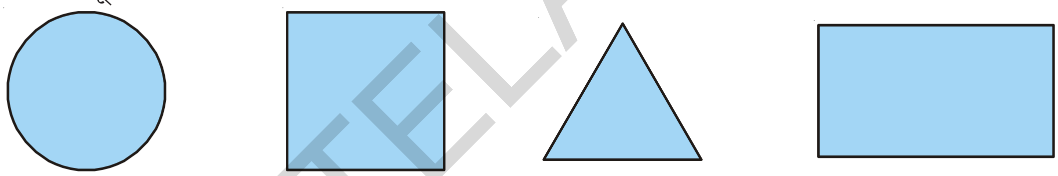
1. खालील वस्तूवर बल्ब पेटवा प्रत्येक सावलीच्या आकृत्यांना नावे द्या. आणि त्या आकृत्या काढा. (यावरून तुम्ही अनेक आकृत्या काढण्यासाठी ह्या कृतीचा वापर करू शकता व प्रश्नाची उत्तरे शोधू शकता)



चेंडू गोलाकार नळी पुस्तक

2. याठिकाणी काही 3-D आकाराच्या वस्तू दिल्या आहेत जेव्हा त्या वस्तू प्रोजेक्ट वर प्रकाशाच्या साहाय्याने आकृत्या ओळखून त्यांच्या सावलीशी जोड्या लावा. (उत्तरासाठी येथे नावे दिली आहेत.)

1.वर्तूळ 2.चौरस 3.त्रिकोण 4.आयात



(i) (ii) (iii) (iv)

पाठ्यावलोकन

3D आकाराच्या आकृत्या व 2D आकाराच्या नेटच्या साहाय्याने

आपण कागदावर काढू शकतो

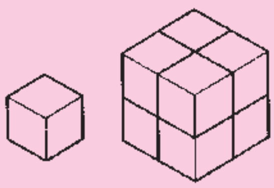
तिरकस आकृत्या सपाट कागदावर काढणे इत्यादी.

घनाकृतीची गंमत

एकावर एक याप्रमाणे 7 घन ठेवा

जी 2 एककात दाखविली आहे.

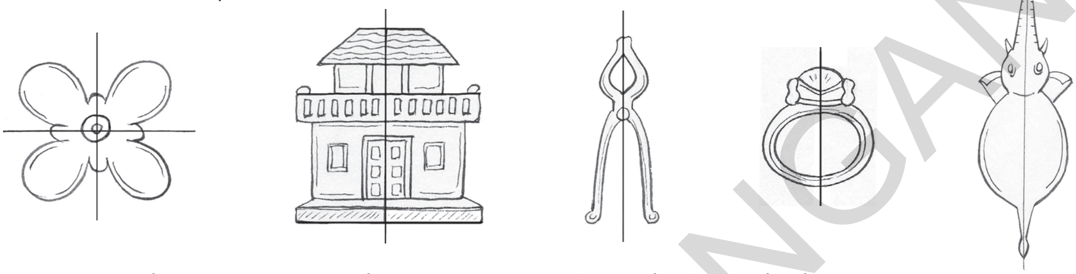
असेच 3 एकक काढण्यासाठी किती घन लागतील ?



समिमिती 15

15.0 प्रस्तावना

तुमच्या सभोवताली पाहा. तुम्हाला अनेक आकाराच्या वस्तू सममितीवर आसल्याच्या दिसतील. त्या काही वस्तू खालील चित्रात दिल्या आहेत.

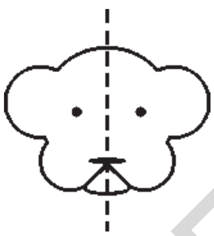


वरील सर्व वस्तू सममितीत आहेत काय ? तुम्ही यांना एकमेकांपासून वेगळे करू शकता काय ?

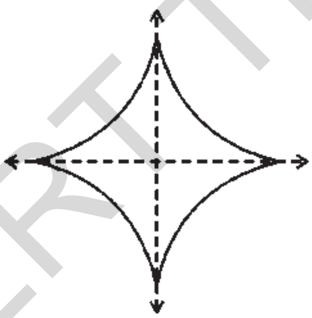
15.1 सममित रेषा

आता आपण सममितता समजून घेण्यासाठी खालील आकृत्या कागदावर काढून

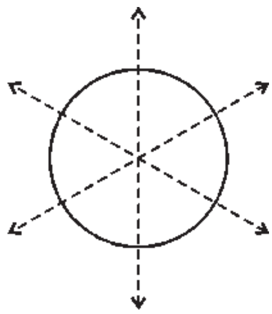
अभ्यास करू या.



आकृती 1



आकृती 2



आकृती 3

आकृती 4

आकृती 1 ला घडी घाला काय निष्कर्ष निघतो ?

तुम्हाला दोन बाजू एकमेकाला जोडलेल्या दिसतील काय हे दुसऱ्या व तिसऱ्या आकृतीसाठी सत्य असेल ?

आकृती 2 आणि 3 मध्ये अनेक रेषा काढू शकता काय चौथ्या आकृतीसाठी याच बाबीचा विचार करू शकता काय?

आकृती 1, 2 आणि 3 या प्रमाणबद्धतेत असून त्याचे दोन भाग करता येतात....... रेषा समान अक्षामध्ये यांनाच प्रमाणबद्धता असतात.

सरावासाठी

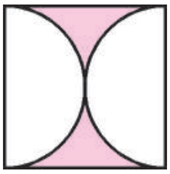
समि‍त असलेल्या 5 नैसर्गिक वस्तूंची नावे लिहा.

समि‍त असलेल्या 5 मानवनिर्मीत वस्तूंची नावे लिहा.

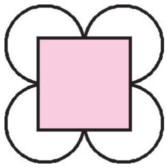
उदाहरणसंग्रह - 1

1. खाली काही आकृत्या दिलेल्या आहे त्यातील कोणत्या आकृत्या सममित आहेत.? त्याचा सममिती अक्ष काढा.

(i)

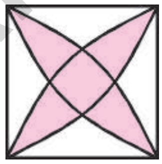


(ii)

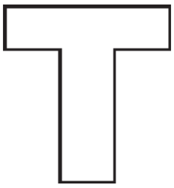


(iii)

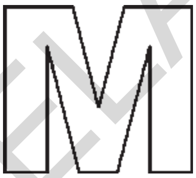
(iv)



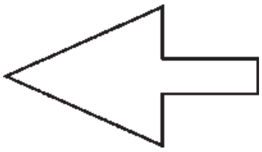
(v)



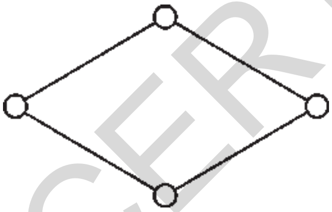
(vi)



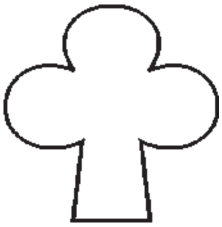
(vii)



(viii)



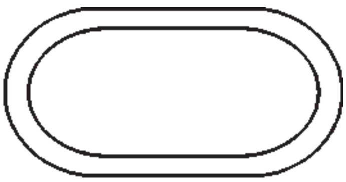
(ix)



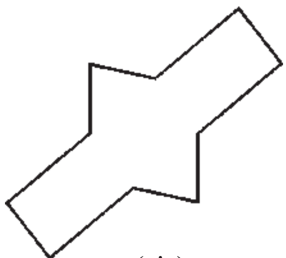
(x)

(xi)

(xii)



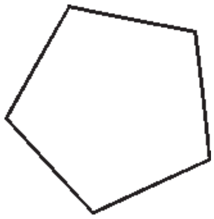
(xiii)



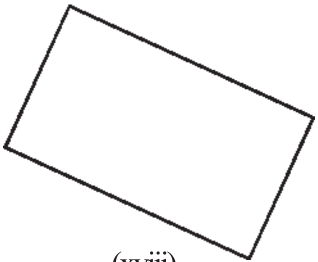
(xiv)

(xv)

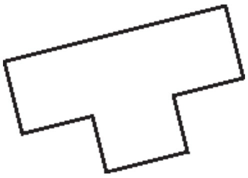
(xvi)



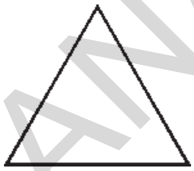
(xvii)



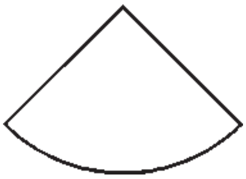
(xviii)



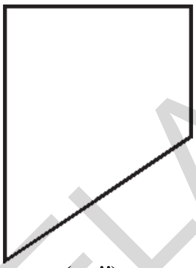
(xix)



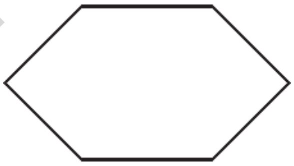
(xx)



(xxi)



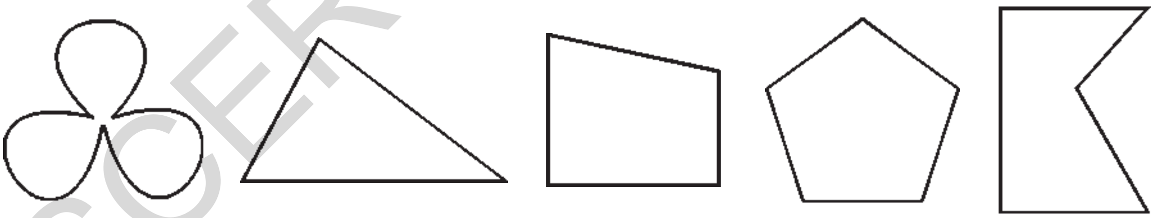
(xxii)



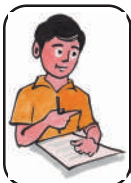
(xxiii)

15.1.1 सममितीच्या बहुभूजाकृती

खालील आकृत्या पहा



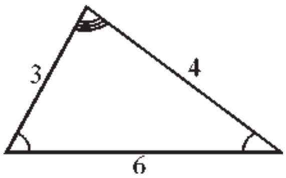
या आकृत्या अनेक रेषांपासून बनलेला आहे. त्यांना बहुभूजाकृती असे म्हणतात. वरीलपैकी कोणती आकृती बहुभूजाकृती असेल.



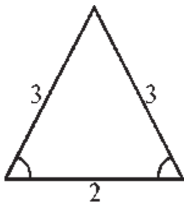
सरावासाठी

1. तिन रेषांपासून आपण बहुभूजाकृती काढू शकतो काय ?
2. बहुभूजाकृतीला कमीत-कमी किती बाजू असतात. ?

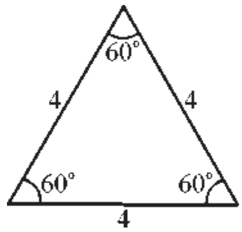
खालील त्रिकोण अभ्यासा.



आकृती 1



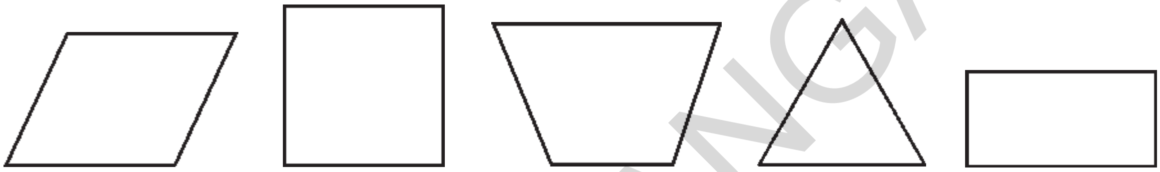
आकृती 2



आकृती 3

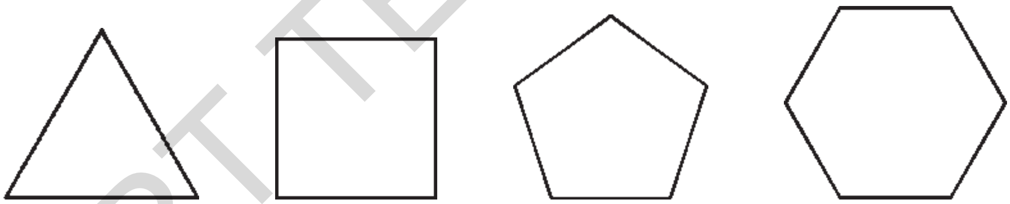
आकृती 3 ही समान बाजू आणि एकरूप कोनाची आहे. यालाच समभूज त्रिकोण म्हणतात.

ज्याच्या सर्व बाजू व सर्व कोन समान असतात त्याला नियमित बहुभूजाकृती असे म्हणतात.



समांतरभूज चौकोन   चौरस   समलंब चौकोन   समभुज त्रिकोण   आयत

आता खालील बहुभूजाकृतीचे सममिती अक्ष काढा.



समभुज त्रिकोण   चौरस   पंचकोन   षटकोन

तुमचे निरीक्षण खालील सारणीत भरा

नियमित बहुभूजाकती	बाजूंची संख्या	सममिती अक्षांची संख्या
समभूज त्रिकोण	3	3
चौरस		
पंचकोन		
षटकोन		

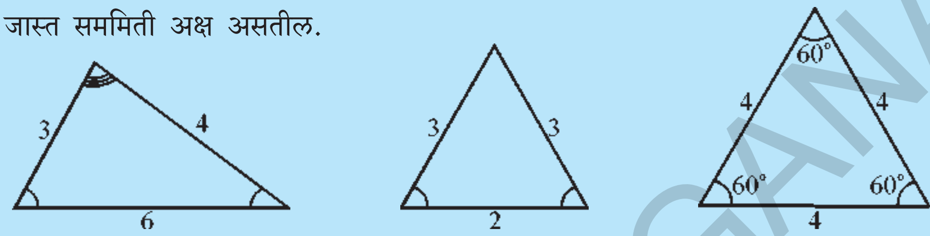
नियमित बहुभूजाकृती आणि सममिती अक्षांची संख्या यांचा संबंध शोधू शकता काय ?

आपणास आढळेल की, बाजूची संख्या व सममिती अक्षांची संख्या समान असते.

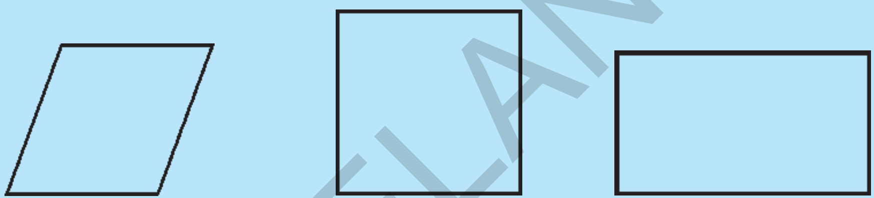
या चारही आकृत्या काढून त्याची कात्रण कापून प्रत्येक आकृतीचा सममिती अक्ष शोधा

सरावासाठी

1. खाली तीन प्रकारचे त्रिकोण दिले आहेत. त्यांचे सममिती समान असेल काय कोणत्या त्रिकोणास जास्त सममिती अक्ष असतील.



2. खाली तिन प्रकारचे चौकोन दिले आहेत. त्यांचे सममिती समान असेल काय कोणत्या त्रिकोणास जास्त सममिती अक्ष असतील.



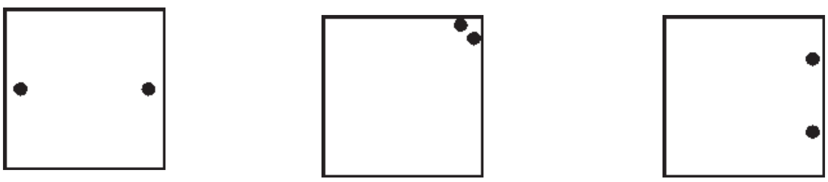
चौकोन चौरस आयत

क्लृप्ती : तुम्ही कागदावर त्रिकोण व चौकोन काढून त्यांच्या घड्या घालून त्यांचे सममिती अक्ष शोधू शकता.

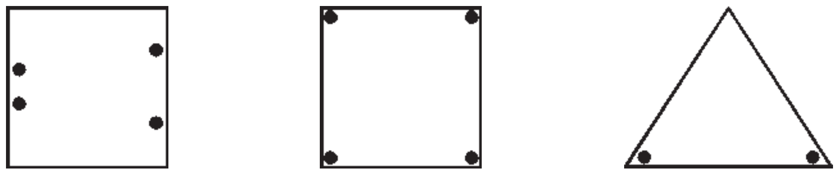
त्याच आधारावर तुम्ही असे म्हणू शकता की, नियमित बहुभूजाकृतीस जास्तीत जास्त सममिती अक्ष असतात.

उदाहरणसंग्रह - 2

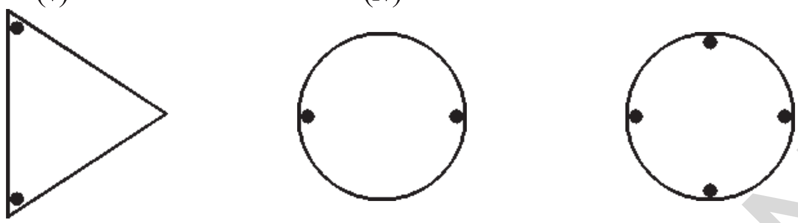
1. दिलेल्या आकृतीमध्ये दोन टिंबाच्या आधावर घडी घालून सममिती अक्ष शोधा.



(i) (ii) (iii)

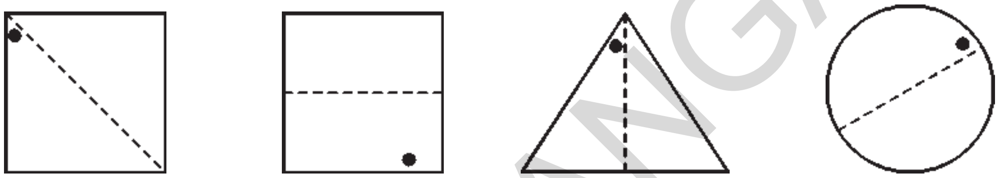


(iv) (v) (iv)



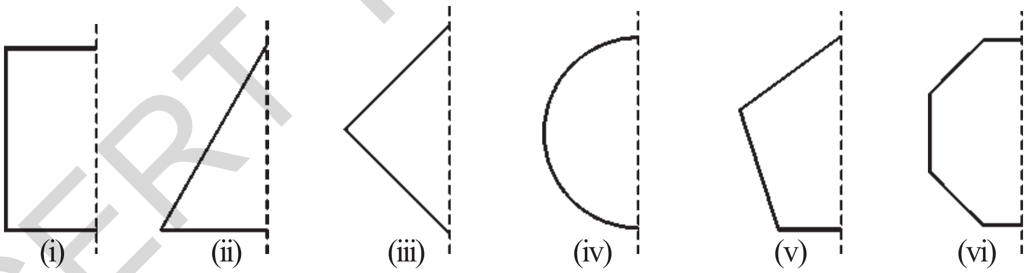
(vii) (viii) (ix)

2. दिलेल्या सममिती रेषेवरून दुसरा टिंब शोधा.



(i) (ii) (iii) (iv)

3. खालील अपूर्ण आकृत्या आरश्यात पाहा. (त्याच्या सममितीय रेषा व टिंब) आरशात पाहून त्यांना पूर्ण करा. आकृत्या पूर्ण केल्यावर त्यांना तुम्ही नावे देऊ शकता काय ?



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

4. खालील विधाने चूक किंवा बरोबर ते लिहा.

(i) प्रत्येक जोडकृतीला सममिती अक्ष असतो. (   )

(ii) कमीत कमी एक सममिती अक्ष असणाऱ्या आकृतीला प्रमाणबद्ध आकृती म्हणतात. (   )

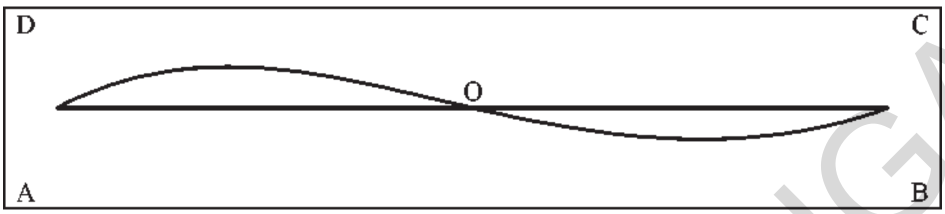
(iii) नियमित बहूभूजाकृतीला 10 बाजू असल्यास 12 अक्ष असतात. (   )

5. चौरस काढा व त्याच्या सममिती अक्षाच्या रेषेची रचना करा. प्रत्येक कोनाची मापे घ्या. व आपले निरिक्षण नोंद करा.

15.2 बलती सममिती

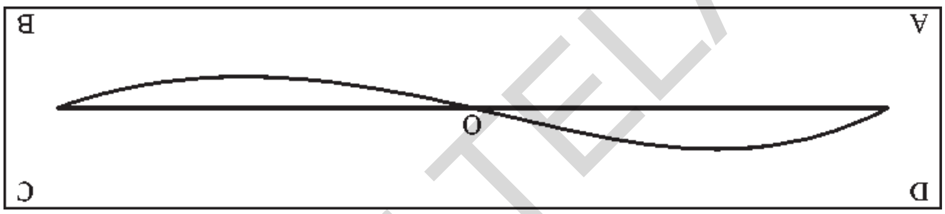
कृती 1 : आरेखन कागदावर खालील आकृती काढा.

त्याच्या जोडलेल्या भागाना घडी घालण्याचा प्रयत्न करा. ही आकृती प्रमाणबद्ध असेल काय ?
आता वेगळ्या स्थितीतील आकृत्यांची जोडी लावण्याचा प्रयत्न करा. वरील आकृती काढून `o' क्रेद्र व किनाराना A,B, C,D नावे द्या.



आकृती 1

180^0 वर कागद गुडांळा.



आकृती 2

पहिल्यापेक्षा दुसरी आकृती कशी दिसते ? याचे निरीक्षण केले काय ?

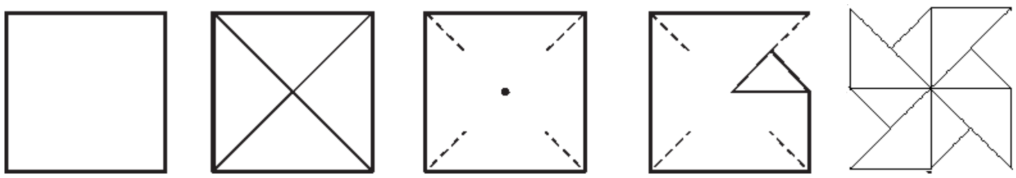
A,B,C,D हे बदलते काय आकृती बदलल्यास काय बदल जाणवतो की नाही ?

कारण ह्या आकृत्या प्रमाणबद्ध आहेत.

कृती 2 : पवन चक्र बनविणे

- चौरसच्या आकाराचा कागद कापा.
- कर्णातून त्याला घडी घाला.
- पहील्या टोकापासून तर मध्यापर्यंत कट करा. असे चारही कोपरे कापा.
- अदला बदल करून मध्यापर्यंत घडी घाला.
- मध्यभागावर पिन रोवा. आता कागद हवेत चक्रकारपणे फिरू लागेल.

• त्याच्या विरुद्ध दिशेकडून पाहा. चक्र गोलाकार फिरत असलेले दिसेल.



आता हे चक्र 90^0 फिरू द्या. प्रत्येकदा फिरल्यानंतर पवनचक्र सारखेच दिसेल. आणि हे चक्रसुद्धा प्रमाणबद्ध असतो.

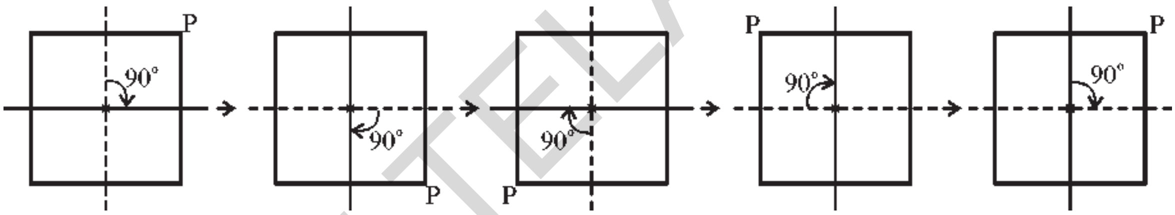
अशा प्रकारे, जर आपण एखादी आकृती फिरविली तर त्याचा मध्य आणि कोन सारखेच दिसतात. अश्या आकृत्यांना आपण प्रमाणबद्ध आकृत्या म्हणूत.

15.2.1 बदलत्या आकृत्यांचे कोन

चौरसात 4 सममिती रेषा असतात आणि 4 अक्ष असतात. तर आता जाणून घेऊ या.

चौरसास बदलता सममिती असतो.

खालील आकृती 1 विचारात घ्या (त्याचा P हा कॉर्नर आहे.)



आकृती 1 आकृती 2 आकृती 3 आकृती 4 आकृती 5

आकृती 1 चौरसाची सुरूवातीची स्थिती दाखवा.

हा चौरस केंद्रापासून 90^0 अंशास फिरविल्यास आकृती 2 ची स्थिती होते. च फिरकी स्थिती घेतो

वरील कृतीत आकृती 2,3,4,5 या मध्ये 90^0 180^0 270^0 360^0 असे कोन दिसतात यालाच

बदलते कोन असलेली सममिती असे म्हणतात.

कमीतकमी फिरत्या आकृतीत जो कोन तयार होतो.

त्याला फिरत्या कोनाची प्रमाणबद्धता किंवा चक्रिय कोन असे म्हणतात.

सरावासाठी

1. चक्रिय चौरस कोनाची मापे सांगा.
2. बदलत्या सममितीय चौरसाच्या कोनाची मापे सांगा.
3. बदलत्या सममितीय त्रिकोणाच्या कोनाची मापे सांगा.

15.2.2 बदलती सममितीचे वैशिष्ट्ये.

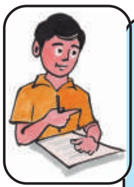
वरील कृतीत चौरसाचा कोन 90^0 अंशाचा असून तो त्याच्या मूळ स्थितीत येण्यापूर्वी 4 वेळा फिरतो. आपण असे सांगू शकतो की, चौरसास 4 समिती अक्ष असतात.

समभुज त्रिकोणाच्या बाबतीत घेतल्यास त्यांच्या कोनाची सममिती 120^0 असते. याचा अर्थ असा की, हा आपल्या केंद्रकाभोवती 3 वेळा फिरतो. त्यास पूर्व स्थितीत येण्यासाठी 3 वेळा फिरावे लागते.

या उदाहरणावरून कोणत्याही आकृत्या घ्या. फिरताना पूर्व स्थितीत येण्यासाठी जेवढा वेळा फिरावे लागतील तेच त्यांचे वैशिष्ट्य आहे.

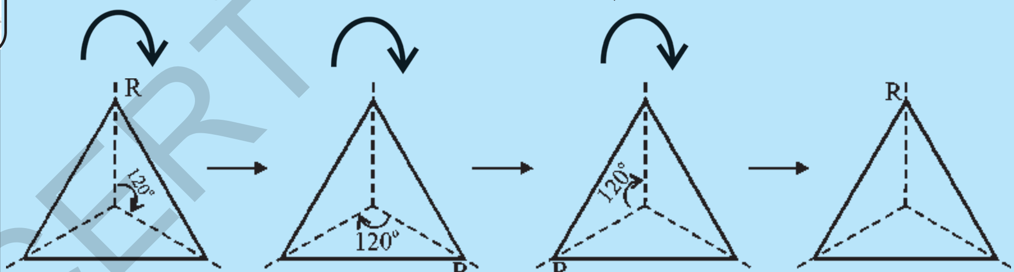
वरील बाबीवरून काही उदाहरणे घ्या.

- चौरसाच्या फिरत्या प्रमाणबद्धतेचे छेदन बिंदू म्हणजेच त्याचा कर्ण होय.
- चौरसाची प्रमाणबदधता ही 90^0 असते.
- चौरसाची बदलती प्रमाणबद्धता 4 असते.



सरावासाठी

1. (i) समभुज त्रिकाणाची सममितीचे वैशिष्टे सांगू शकता काय ?



(i) (ii) (iii) (iv)

(ii) सममितीच्या किती रेषा आहेत.

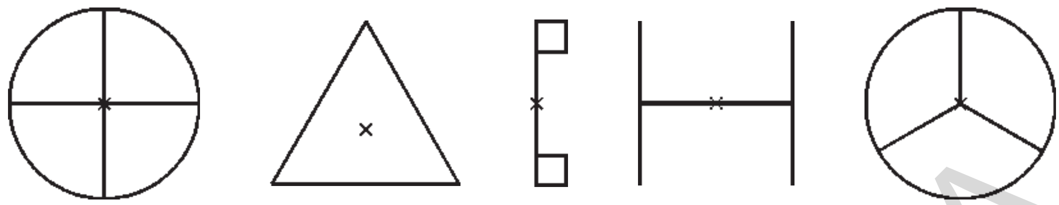
(iii) प्रत्येक लगतच्या अक्षा जवळील कोनाचे माप सांगा.

2. तुमच्या सभोवताली पाहा. कोणत्या वस्तू बदलत्या सममितीचे दिसतात?

टिप : लक्षात ठेवा ज्याची सममिती 1 असते ती आकृती स्वत:भोवती फिरण्यासाठी 360^0 चा कोन करीत असते.

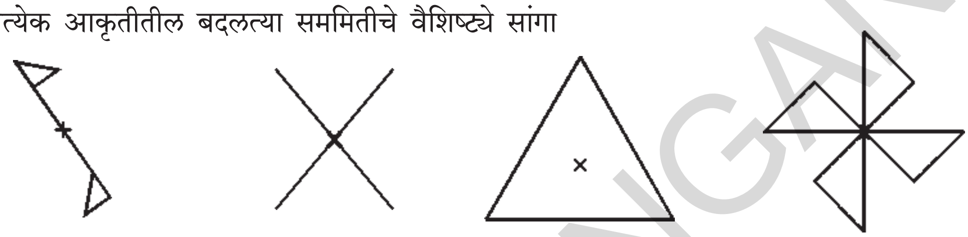
स्वाध्याय - 3

1. खालीलपैकी कोणत्या आकृत्यास 1 पेक्षा जास्त सममिती अक्ष आहेत ?



(i) (ii) (iii) (iv) (v)

2. प्रत्येक आकृतीतील बदलत्या सममितीचे वैशिष्ट्ये सांगा



(i) (ii) (iii) (iv)

(v) (vi) (vii) (viii)

3. प्रत्येक आकृती काढून खालील तक्ता पूर्ण करा.

आकार	केंद्रातून छेदणारी रेषा	फिरता कोन	फिरण्याची स्थिती
चौरस			
आयात			
समभुज चौकोन			
समभुज त्रिकोण			
नियमित षटकोन			
वर्तुळ			
अर्धवर्तुळ			

15.3 रेषिय सममिती आणि बदलती सममिती

आताच आपण रेषिय सममिती आणि बदलती सममिती.शिकलोत (ज्यांचे सममिती अक्ष 1)

आणि काही 2 आहेत. वर्तुळ हा गोलीय सममितीचा असतो.

त्यासाठी काही आकृत्या पाहा ज्यांना अनिश्चित सममिती आहेत.

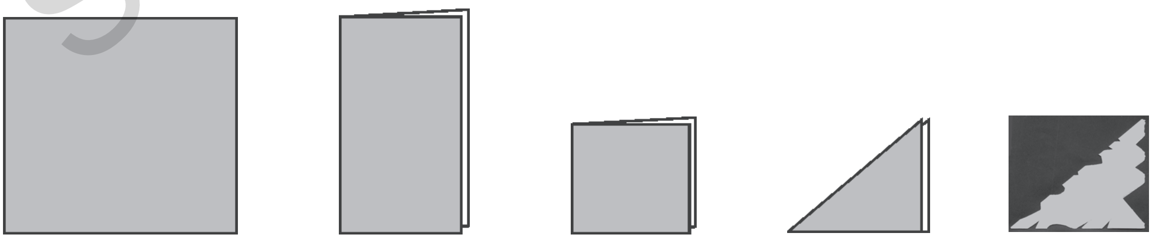
उदाहरण 1 : खालील आकृत्यांमध्ये कोणत्या आकृत्या रेषीय सममितीच्या व कोणत्या आकृत्या चक्रिय सममितीच्या आहेत.

(i) (ii) (iii) (iv)

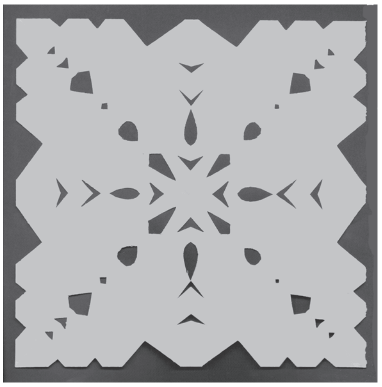
आकृती	रेषिय सममिती	चक्रिय सममिती
1.	होय	नाही
2.	नाही	होय
3.	होय	होय
4.	नाही	होय

कृती 3 :

- चौरसाकृती कागद घ्या.
- प्रथम उभी व नंतर आडवी घडी घाला.
- आकृती 4 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे कर्णातून घडी घाला.
- आकृती 5 मध्ये दाखविल्याप्रमाणे रेषा पडलेल्या भागाना कापा.
- आता कागदाचे तुकडे खुले करा.



आकृती 1 आकृती 2 आकृती 3 आकृती 4 आकृती 5



(i) या कागदाला रेषिय सममिती आहे काय ?

(ii) या कागदाला चक्रिय सममिती आहेकाय ?

स्वाध्याय - 4

1. काही इंग्रजीतील मुळाक्षरे दिली आहेत ज्यांना सममिती आहे.
E सारखी सममिती कोणत्या अक्षरांना आहेत?
1 सारखी सममिती कोणत्या अक्षरांना आहेत.
विचार करून तक्ता पूर्ण करा.

मुळाक्षरे	रेषिय सममिती	अक्षाची संख्या	चक्रिय सममिती	अक्षाची संख्या
Z	नाही	0	होय	2
S				
H				
O				
E	होय	1	नाही	-
N				
C				

गृह प्रकल्प

वर्तमानपत्र, मासिक, जाहीराती यातून प्रमाणबद्ध आकृत्या गोळा करा व त्यांचे सममिती अक्ष रेखाटा.

पाठ्यावलोकन

- आकृतीला दोन भागात विभागणाऱ्या रेषेला सममिती किंवा सममिती अक्ष असे म्हणतात.
- कोणत्याही वस्तूला एक किंवा एकापेक्षा जास्त सममिती रेषा किंवा अक्ष असतात.
- जर आपण एखाद्या आकृतीला एक बिंदूतून फिरविल्यास ती तशीच दिसते त्यालाच चक्रिय सममिती असे म्हणतात.
- ज्या बिंदूतून कोन फिरतो त्यास चक्रियकोन असे म्हणतात.
- कोणतीही आकृती 1 अक्ष असलेली जर फिरविल्यास ती 360^0 च्या कोनात पूर्ण फेरी करते त्यास चक्रिय चौकानची समिती म्हणतात.
- काही आकृत्यांना रेषीय सममीती असते तर काहिंना प्राकृतिक सममीती असते तर काहिंना दोन्हीही असतात. चौकोन, आयत आणि वर्तुळ यांना दोन्ही प्रकारच्या सममीती असतात.

उत्तरे

01- पूर्णांक संख्या

स्वाध्याय - 1 (पृष्ठ - 2) 1) मोठी संख्या =2, लहान संख्या = -3

(2) (i) -10, -9, -8, -7, -6, -5 ; मोठ्यात मोठी संख्या = -5 ; लहानात लहान संख्या = -10

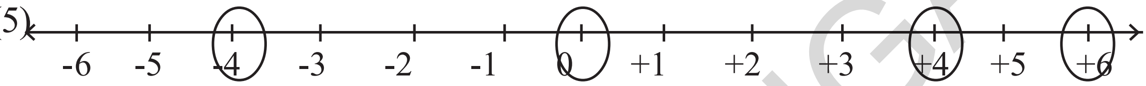
(ii) -2, -1, 0 +1, +2, +3 ; मोठ्यात मोठी संख्या = +3 ; लहानात लहान संख्या = -2

(iii) -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5

b) मोठ्यात मोठी संख्या = +5 ; लहानात लहान संख्या = -8

(3) (i) -8, -5, 1, 2 (ii) -5, -4, -3, 2 (iii) -15, -10, -7

(4) (i) -2, -3, -5 (ii) -1, -2, -8 (iii) 8, 5, -2

(5)


6) संख्या दर्शविण्यासाठी संख्या रेषा काढणे आवश्यक *-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6,7,9,*

(7) i)

क्र.	शहराचे नाव	तापमान
1	बेंगलुरू	20°C
2	ऊटी	15°C
3	नैनीताल	-3°C
4	मनाली	-7°C
5	कसौली	-9°C

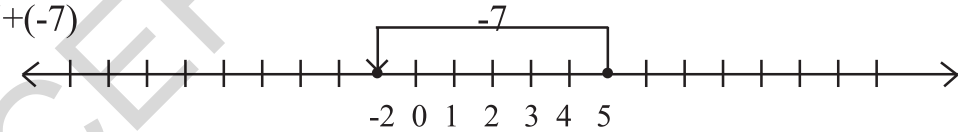
(ii) बेंगलुरू (20°C) (iii) कसौली (-9°C)

(iv) नैनिताल (-3°C) मनाली (-7°C) कसौली (-9°C)

(v) ऊटी (15°C) बेंगलुरू (20°C)

स्वाध्याय - 2 (पृष्ठ - 4)

(1) 5+(-7)



(2) (i) 11 (ii) 5 (iii) 14 (iv) 8 (v) 2 (vi) 4

(vii) -2 (viii) 0 (ix) 8 (x) 20 (xi) 80

स्वाध्याय - 3 (पृष्ठ - 6)

(1) (i) 5 (ii) 15 (iii) -4 (iv) 1 (v) 13 (vi) -1

(2) (i) 31 (ii) 21 (iii) 24 (iv) -13

(v) -8 (vi) 130 (vii) 75 (viii) 50

(3)

क्र.	ऋण पूर्णांक	+	नैसर्गिक संख्या	=	-6
1	(-6)	+	0	=	-6
2	(-7)	+	1	=	-6
3	(-8)	+	2	=	-6
4	(-9)	+	3	=	-6 etc.,

स्वाध्याय - 4 (पृष्ठ - 11)

(1) (i) +600 (ii) -1 (iii) -600 (iv) +200 (v) -1545

(2) (i) -3 (ii) -225 (iii) 630 (iv) 316 (v) 0

(vi) 1320 (vii) 162 (viii) -360 (ix) -24 (x) 36

(3) -10° (4) (i) 10 (ii) 18 (iii) 5 (5) (i) ₹.500 नफा (ii) 3200

(6) (i) -9 (ii) -7 (iii) +7 (iv) -11

स्वाध्याय - 5 (पृष्ठ - 19)

(1) (i) बरोबर (72 = 126 - 54 = 72) (ii) बरोबर (210 = 84 + 126 = 210) (2) (i) -a (ii) -5

(3) (i) 480 (ii) -53,000 (iii) -15000 (iv) -4182

(v) -62500 (vi) 336 (vii) 493 (viii) 1140

स्वाध्याय - 6 (पृष्ठ - 22)

(1) (i) -1 (ii) -49 (iii) व्याख्या नाही (iv) 0

स्वाध्याय - 7 (पृष्ठ - 23)

(1) (i) 24 (ii) 20 (2) (i) 33,000 (ii) 3000

(3) 19 तास किंवा सायं. 7 वा, मध्यरात्रीचे तापमान = -18°C

(4) (i) 18 प्रश्न (ii) 13 प्रश्न (5) 1 तास

02- अपूर्णांक, दशांश अपूर्णांक आणि परिमेय संख्या

स्वाध्याय - 1 (पृष्ठ - 29)

(1) (i) $2\frac{3}{4}$ (ii) $1\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $3\frac{1}{6}$ (v) $\frac{19}{24}$ (vi) $6\frac{1}{6}$

(2) (i) $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{6}$ (ii) $\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$

(3) ओळीतील बेरीज = $\frac{21}{13}$, स्तंभातील बेरीज = $\frac{21}{13}$, कर्ण बेरीज = $\frac{21}{13}$ सर्व बेरजा समान

(4) $17\frac{11}{15}$ cm (5) $1\frac{7}{8}$ (6) $\frac{7}{12}$

(7) त्रिकोण ABE परिमिती $= 10\frac{1}{5}$ cm; BCDE परिमिती $= 7\frac{11}{15}$ cm ;

त्रिकोण ABE पेक्षा जास्त ; फरक $= 2\frac{7}{15}$ 4

स्वाध्याय - 2 (पृष्ठ - 34)

(1) (i) $5\frac{0}{6}$ or 5 (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $7\frac{5}{7}$ (iv) $1\frac{1}{9}$ (v) $6\frac{0}{5}$ or 6

(2) (i) 6 (ii) 6 (iii) 9 (iv) 15

(3) (i) 4 (ii) 6 (iii) 6 (iv) 12

स्वाध्याय - 3 (पृष्ठ - 37)

(1) (i) $\frac{35}{66}$ (ii) $1\frac{1}{5}$ (iii) $7\frac{7}{15}$ (2) (i) $3\frac{7}{15}$ (ii) $\frac{2}{21}$ (iii) 3

(3) (i) $\frac{3}{8}$=1/2 चे 3/4 (ii) दोन्ही सारखे (4) $17\frac{1}{2}$ hrs. (5) $85\frac{1}{3}$ km. (6) 1 m 350 mm.

(7) (i) $\frac{10}{7}$ (ii) $\frac{3}{5}$, 35 or 3,7

स्वाध्याय - 4 (पृष्ठ - 43)

(1) (i) $\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{7}{13}$ (iv) $\frac{4}{3}$ (2) (i) 24 (ii) $3\frac{3}{7}$ (iii) $1\frac{2}{7}$ (iv) $\frac{7}{5}$

(3) (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{7}{40}$ (iii) $\frac{7}{13}$ (iv) $\frac{4}{3}$ (4) $2\frac{1}{2}$ days

स्वाध्याय - 5 (पृष्ठ- 45)

(1) (i) 0.7 (ii) 8.5 (iii) 1.51 (iv) 0.66 (2) (i) ₹. 0-09 (ii) ₹. 77-07 (iii) ₹. 2-35

(3) (i) 0.1 m, 0.000 km (ii) 4.5 cm, 0.045 m, 0.000045 km.

(4) (i) 0.19 kg (ii) 0.247 kg (iii) 44.08 kg

(5) (i) $50+5+\frac{5}{10}$ (ii) $5+\frac{5}{10}+\frac{5}{100}$ (iii) $300+3+\frac{3}{100}$

(iv) $30+\frac{3}{10}+\frac{3}{1000}$ (v) $1000+200+30+4+\frac{5}{10}+\frac{3}{100}$

(6) (i) 3 (ii) 30 (iii) $\frac{3}{100}$ (iv) $\frac{3}{10}$ (v) $\frac{3}{100}$ (7) 11.90 km, 12.00 km, 100 m.

स्वाध्याय -6 (पृष्ठ- 50 । 51)

(1) (i) 1.8 (ii) 18.9 (iii) 13.35 (iv) 78.8 (v) 0.35
(vi) 1050.05 (vii) 1.72 (2) 24.8 cm^2

(3) (i) 213 (ii) 368 (iii) 537 (iv) 1680.7 (v) 13110

(vi) 15610 (vii) 362 (viii) 4307 (ix) 5 (x) 0.8

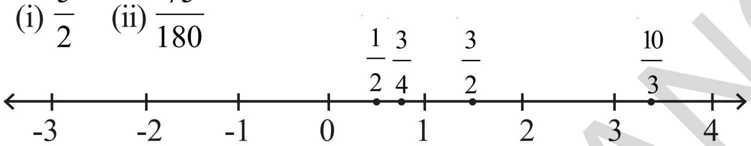
(xi) 90 (xii) 30 (4) 625 Km (5) (i) 0.45 (ii) 0.475
(iii) 42.16 (iv) 14.62 (v) 0.025 (vi) 1.2 (vii) 0.0214

(viii) 10.5525 (ix) 1.0101 (x) 77.011 (6) (i) 0.023 (ii) 0.09 (iii) 4.43
(iv) 0.1271 (v) 2 (vi) 590 (vii) 0.02 (7) 5 (8) 0.128 cm

स्वाध्याय -7 (पृष्ठ- 56)

(2) (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{75}{180}$

(3)



(4) (i) चूक (ii) बरोबर (iii) चुक (iv) चूक (v) बरोबर

03 - साधी समीकरणे

स्वाध्याय - 1 (पृष्ठ - 59)

(1) (i) LHS = 2x, RHS = 10 (ii) LHS = 2x-3, RHS = 9 (iii) LHS = 4z+1, RHS = 8 (iv) LHS = 5p+3, RHS = 2p+9

(v) LHS = 14, RHS = 27-y (vi) LHS = 2a-3, RHS = 5 (vii) LHS = 7m, RHS = 14 (iv) LHS = 8, RHS = q+5

(2) (i) y = 5 (ii) a = 7 (iii) m = 3 (iv) n = 7

स्वाध्याय - 2 (पृष्ठ - 63)

(1) (i) x = 4 (ii) y = 7 (iii) x = 5 (iv) z = 9 (v) x = 3 (vi) y = -20

(2) (i) y = 5 (ii) a = 4 (iii) q = 4 (iv) t = 4 (v) x = 13
(vi) x = 3 (vii) x = -5 (viii) x = -1 (ix) x = 4 (x) x = -2

स्वाध्याय - 3 (पृष्ठ - 67)

(1) 4 cm (2) 5 cm (3) 21 (4) 30 (5) 8 (6) 49, 49 (7) 7, 8, 9

(8) l = 34m, b = 2m (9) l=23m, b=19m (10) 5 वर्षे (11) 19, 44 (12) -25, -15

13) 2 (14) 40 (15) 30°, 60°, 90° (16) 30

04 - रेषा आणि कोन

स्वाध्याय - 1 (पृष्ठ - 69)

(1) (i) रेखा AB (ii) किरण CD (iii) रेषा XY (iv) बिंदू 'P'

(2) (i) O P (ii) • X (iii) R S (iv) C D

(3) $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}$

(5) (i) लघुकोन (ii) विशालकोन (iii) काटकोन (iv) लघुकोन (v) विशालकोन

(6) $\angle$AOF, $\angle$FOE, $\angle$EOD, $\angle$DOC, $\angle$COB, $\angle$FOD, $\angle$EOC, $\angle$DOB - लघुकोन

$\angle$AOE, $\angle$EOB, $\angle$FOC - काटकोन ; $\angle$AOD, $\angle$AOC, $\angle$FOB - विशालकोन

$\angle$AOB -रेषीय कोन (7) (i) आणि (iv) समांतर ; (ii) आणि (iii) असमांतर

(8) i, ii आणि iv छेदणाऱ्या रेषा आहेत आणि iii छेदणाऱ्या रेषा नाहीत.

स्वाध्याय - 2 (पृष्ठ - 71)

(1) iii (2) (i) 65° (ii) 50° (iii) 1° (iv) 35° (3) 45°, 65°

(4) होय. कारण कोनाच्या मापाची बेरीज 90°

स्वाध्याय - 3 (पृष्ठ - 73)

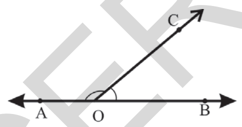
(1) (i), (ii) (2) (i) 75° (ii) 85° (iii) 30° (iv) 160°

(3) दोन लघुकोनांच्या मापाची बेरीज 180° पेक्षा कमी आहे (4) 90°, 90°

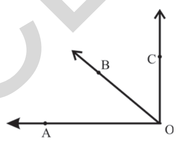
स्वाध्याय - 4 (पृष्ठ - 74)

(1) (i) a, b (ii) c, d (2) (i) $\angle$AOD, $\angle$DOB (ii) $\angle$DOB, $\angle$BOC

(iii) $\angle$BOC, $\angle$COA (iv) $\angle$COA, $\angle$AOD

(3) होय 

कारण $\angle$AOC + $\angle$BOC = 180°

(4) होय 

कारण $\angle$BOA + $\angle$COB = 90°

स्वाध्याय - 5 (पृष्ठ- 75)

(1) i, ii (2) नाही कारण त्या सामाईक भुजा नाहीत.

स्वाध्याय - 6 (पृष्ठ - 76)

(1) (i) $\angle$AOD, $\angle$BOC (ii) $\angle$AOD, $\angle$DOB

(2) y = 160° (विरूद्ध कोन) $x + 160° = 180°$ $\therefore x = 20°$

$\angle x = \angle z$ विरूद्ध कोन $\therefore z = 20°$

स्वाध्याय - 7 (पृष्ठ - 85)

(1) (i) छेदिका (ii) समांतर (iii) समांतर (iv) एक

(2) (i) 100° (ii) 45° (iii) 90° (iv) 100°

(3) $\angle x = 180 - (75+45) = 60°$; $\angle y = 75$; $z = 45°$

(4) $b + 50° = 180°$ $\therefore b = 130°$

$b + c = 180° \Rightarrow 130° + c = 180° \Rightarrow c = 50°$

$d + 50° = 180° \Rightarrow d = 130°$

(5) $\angle APQ + \angle AQR = 180°$

$100° + \angle PQR = 180°$

$\angle AQR = 80°$

$\angle AQR = \angle CRS = 80°$ संगतकोन

$\therefore l \parallel m$

(6) $\angle a = 50°$ (व्युत्क्रम कोन)

$\angle b = 50°$ (व्युत्क्रम कोन)

$\angle c = \angle d = \angle e = 50°$

(सर्व व्युत्क्रम कोन)

05 - त्रिकोण व त्रिकोणाचे गुणधर्म

स्वाध्याय - 1 (पृष्ठ - 93)

(1) (i) शक्य (ii) शक्य (iii) अशक्य (iv) शक्य (v) अशक्य

स्वाध्याय - 2 (पृष्ठ - 94)

(1) (i) मध्यगा 0 (ii) तिरकस उंची (2) काटकोन त्रिकोण (3) होय

(4) नाही.काहीवेळा त्रिकोणाच्या बाहेरील बाजूस असते. (5) (i) XZ (ii) $\angle P$ (iii) B

स्वाध्याय -3 (पृष्ठ - 100)

(1) (i) 70° (ii) 60° (iii) 40° (2) (i) $x = 70°$; $y = 60°$ (ii) $x = 80°$; $y = 50°$
(iii) $x = 110°$; $y = 70°$ (iv) $x = 60°$; $y = 90°$ (v) $x = 45°$; $y = 90°$ (iv) $x = 60°$

(3) (i) 40° (ii) 34° (iii) 60° (4) 60° (5) (i) चूक (ii) बरोबर (iii) चूक (iv) चूक

(6) (i) 30° ; 60° ; 90° (7) $x = 100°$; $y = 50°$; $z = 100°$

(8) $\angle LPM = 40°$; $\angle LMP = 50°$; $\angle QRP = 50°$ (9) 72°

(10) $\angle P = 50°$; $\angle Q = 30°$; $\angle R = 90°$ (11) 18° ; 72° ; 90° (12) 36° (13) 540°

स्वाध्याय - 4 (पृष्ठ - 107)

(1) अंतरकोन : $\angle ABC, \angle CBA, \angle BAC$; बाह्यकोन : $\angle CBX, \angle ACZ, \angle BAY$

(2) $\angle ACD = 111°$ (3) $x = 115°$; $y = 35°$ (4) (i) $x = 50°$ (ii) $x = 33°$; $y = 82°$

(5) $\angle CDB = 76°$; $\angle CBD = 39°$; $\angle CBA = 58°$

(6) (i) $x = 55°$ (ii) $x = 100°$ (iii) $x = 120° y = 30°$ (iv) $y = 70°$ (v) $x = 60°$; $y = 150°$
(vi) $x = 55°$; $y = 55°$ (7) $50°$; $75°$; $55°$ $x = 40°$ (8) $\angle P$ $35°$,होय (9) $70°$

(10) $30°$; $75°$; $75°$ (11) $x = 135°$; $y = 80°$

06 - टक्केवारी आणि त्याचा वापर

स्वाध्याय - 1 (पृष्ठ - 111)

(1) 100 : 10 , 10:1 (2) ₹.15 (i) 15 : 5 or 3 : 1 (राधा : सुधा)
(ii) 5 : 15 or 1 : 3 (सुधा : राधा) (5) राजूचा वाटा = 40 ; रविचा वाटा = 56

(6) $\overline{AX} = 18$ cm ; $\overline{XB} = 20$ cm. (5) ₹.60,000 (6) 8 liters

(3) 40 : 20 or 2: 1 (4) 1:2400 or 0.0

(9) (i) वर्गातील मुलामुलींची संख्यामोजून प्रमाणात लिहा. मुली किंवा मुले शून्य असतील तर तुम्ही त्यांना प्रमाणात दाखवू शकता काय? हे प्रमाण दाखविता येत नाही.

(ii) वर्गाच्या दारे व खिडक्या मोजा आणि त्यांचे प्रमाण लिहा.

(iii) तुमच्या वह्या व पुस्तकांची संख्या मोजा. आणि त्यांना प्रमाणात लिहा.

स्वाध्याय - 2 (पृष्ठ - 114)

(1) (i) 8, 8 (ii) 450, 450 (iii) 96, 96 (iv) 6, 30 (v) 24, 72

(2) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य

(3) ₹.90 (4) 10 kg (5) a) 45 b) 26 (6) i) 540° ii) 21°

स्वाध्याय - 3 (पृष्ठ - 120)

(1) 0.0001 cm ; 2cm (2) (i) हो (ii) नाही (iii) नाही. (3) 4 cm

(4)
- 5 वेगवेगळे चौरस काढून लांबी मोजून तक्त्यात लिहा.
- चौरसाची परिमिती चारपट असते. ती तक्त्यात लिहा.
- चौरसाची प्रत्येक बाजू तक्त्यात लिहा.

(i) होय, चौरसाची परिमिती ही त्यांच्या बाजुच्या प्रमाणात बदलते.

(ii) नाही, चौरसाची बाजु ही त्यांच्या क्षेत्रफळाच्या प्रमाणात बदलत नाही.

स्वाध्याय - 4 (पृष्ठ - 125)

(1) शाळा Y (2) 20% घट (3) आंबे = 35% (4) 16%

(5) गैरहजर = $16\frac{2}{3}\%$ किंवा 16.66% हजर = $83\frac{1}{3}\%$ किंवा 83.33% (6) 7200

(7) 15 (8) सोने 70% ; चांदी 25% ; तांबे 5% (9) 2000

स्वाध्याय - 5 (पृष्ठ - 136)

(1) $12\frac{1}{2}\%$ or 12.5% (2) 6% (3) ₹. 2,00,000 (4) ₹. 175

(5) loss = 1200 (2.44%) (6) 561 (7) 202.5 (8) 800 (9) 1100

स्वाध्याय - 6 (पृष्ठ - 140)

(1) 2 वर्षे 8 महिने किंवा $\frac{8}{3}$ वर्षे किंवा $2\frac{2}{3}$ वर्षे (2) 12%

(3) ₹. 450 (4) ₹. 12958 (5) $1\frac{1}{2}$ वर्षे

07 - सामग्रीची हाताळणी

स्वाध्याय 1 (पृष्ठ - 147)

(1) (i) 33 ^{0}C (ii)30 ^{0}C (2) 15,9000 kg

(3) (i) भुईशेंग ₹:7500 ; ज्वारी ₹:4000 ; मटकी ₹:5250 (ii) भुईशेंग (4) 42

(5) (i) 23 (ii) 21,3ने (iii) 16.5,4 ने (iv) लेख्या (6) (i) ₹:18 (ii) ₹:54 (iii) ₹:9 (iv) प्रमाणात

(7) 5.5 (8) 5.6 (9) 107

स्वाध्याय 2 (पृष्ठ - 152)

(1) 155 cm (2) (i) मध्य = 28, मध्यांक = 27 (ii) 2 खेळाडूंचे प्रत्येकी वय 25 वर्षे

(3) 25 (4) (i) मध्यांक (ii) मध्य (iii) मध्य (iv) मध्यांक

स्वाध्याय 3 (पृष्ठ - 155)

(1) (i) F मध्य नाही, मर्यादीत (ii) T

(iii) F (मोडनाही, मध्य आहे) (iv) F (जर संख्या सम असेल तर हे नाही)

(2) (i) ₹:1400 (ii) ₹:1450 (3) मध्यांक बरोबर असून मध्यमान चुकीचे आहे. (4) अशक्य

(5) 11

स्वाध्याय 4 (पृष्ठ - 160)

(5) (i) शिक्षण (ii) अन्न (iii) ₹:2250 (iv) ₹:2000

08 - त्रिकोणाची एकरूपता

स्वाध्याय - 1 (पृष्ठ. 169)

(1) (i) सत्य (ii) असत्य $\angle S \neq AD$

(2) (i) $\angle P = \angle R$

$\angle TQP = \angle RQS$

$\angle T = \angle S$

(ii) $\angle ROS = \angle QOP$

$\angle R = \angle Q$ or $\angle R = \angle P$

$\angle S = \angle P$ or $\angle S = \angle Q$

(3) (ii) बरोबर (4) होय (बा-बा-बा कसोटी)

स्वाध्याय - 2 (पृष्ठ. 171)

(1) पक्षात दिलेले आहे की GH = TR आणि HJ = TS

(2) AP = 4 km ($\therefore$ AP = BQ c.p.c.t.)

(3) (i) $\Delta ABC \cong \Delta STR$

AB = ST also BC = TR

$\angle A = \angle S$ $\angle B = \angle T$

AC = SR $\angle C = \angle R$

(ii) $\Delta POQ \cong \Delta ROS$

PO = RO also PQ = RS

OQ = OS $\angle P = \angle R$

$\angle POQ = \angle POS$ $\angle Q = \angle S$

DR = OW also DO = OD

(iii) $\Delta DRO \cong \Delta OWD$

RO = WD $\angle ROD = \angle WOD$

$\angle R = \angle W$ $\angle DOR = \angle ODW$

आकृती $\square$ WORD

$\angle R = 90°$

WD = OR आणि WO = DR

$\therefore$ $\square$ WORD आयत आहे.

$\therefore$ $\Delta WSD \cong \Delta RSO$

$\Delta WSO \cong \Delta RSD$

आणखी $\Delta ORW \cong \Delta DWR$

(iv) ΔABC आणि ΔCDA एकरूप नाही

(4) (i) ΔABC मध्ये आणि ΔRQP माहित असणे आवश्यक आहे की, AB = RQ.

(ii) ΔABC मध्ये आणि ΔADC माहित असणो आवश्यक आहे की, AB = AD.

स्वाध्याय - 3 (पृष्ठ. 175)

(1) (i) को-को-बा $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (ii) को-को-बा किंवा को-को-को $\Delta ABD \cong \Delta CDB$

(iii) को-को-को किंवा को-को-बा $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (iv) को-को-को $\Delta ABC \cong \Delta FED$

(2) (i) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (को-को-बा)

(ii) AB = CD (त्रिकोणाचा एकरूप भाग) कारण $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (को-को-बा)

$\therefore$ $\Delta AOB \cong \Delta DOC$

ΔAOB आणि ΔDOC सारखे को-को-को ने

एकरूप त्रिकोणाचे सर्व भाग सारखे असतात.

स्वाध्याय – 4 (पृष्ठ. 178)

(1) (i) बा-बा-बा (ii) बा-को-बा (iii) को-बा-को (iv) उजवी बाजू

(2) (i) a) AR = PE b) RT = EN c) AT = PN (ii) a) RT = EN b) PN = AT
(iii) a) $\angle A = \angle P$ b) $\angle T = \angle N$

(3) (i) बाजू (ii) कोन (iii) सामाईक बाजू (iv) बा-को-बा

(4) यावरून, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ जेव्हा हे कोन समान असतात तेव्हा त्यांना समांतर कोन म्हणता येईल काय?

(5) $\Delta RAT \cong \Delta WON$ (6) $\Delta ABC \cong \Delta ABT$ आणि $\Delta QRS \cong \Delta TPQ$

(7) (i) सारख्या मापाचे दोन त्रिकोण काढा (ii) सारख्या मापाचे दोन त्रिकोण काढा

(8) BC = QR (A.S.A.) किंवा AB = PQ (A.A.S.) किंवा AC = PR (A.A.S.)

(9) $\angle B = \angle E$; $\angle A = \angle F$ by A.A.S. $\Delta ABC \cong \Delta FED$ एकरूप आहेत ; BC = ED

10- बैजिक राशी

स्वाध्याय – 1 (पृष्ठ – 192)

(1) (i) 34 (ii) 24

(2) (i) • आकृती 4 ही चौरसाची आहे का? त्याच्या सर्व बाजू समान आहेत का?
• आकृती 5 चौरसाची असून त्याच्या सर्व बाजू समान आहेत.
(ii) बैजिक राशीच्या गुणधर्मावरून = 4n ; 4, 8, 12, 16, 20 . . . . . राशी = 4n
(iii) बैजिक राशीच्या गुणधर्मावरून = 4n + 1 ; 9, 13, 17, 21 . . .. राशी = 4n + 1

(3) (i) $p+6$ (ii) $x-4$ (iii) $y-8$ (iv) $-5q$ (v) $y \div 4$ or $\frac{y}{4}$
(vi) $\frac{1}{4}$ of pq or $\frac{pq}{4}$ (vii) $5+3z$ (viii) $5x+10$ (ix) $2y-5$ (x) $10y+13$

(4) (i) ' x पेक्षा जास्त 3 ' किंवा 3 मिळविल्यास x (ii) 'y' मधून 7 वजा (iii) l गुणल्यास 10. (iv) x भागल्यास 5
(v) n गुणून 3 आणि 11 मिळवून
(vi) y गुणल्यास 2 वजा केल्यास 5 किंवा 5 वजा केल्यास 2 वेळा y

(5) (i) स्थिर (ii) बदलते (iii) स्थिर (iv) बदलते

स्वाध्याय – 2 (पृष्ठ –199)

(1) (i) $(a^2, -2a^2)$ (ii) $(-yz, 2zy)$ (iii) $(-2xy, 5y^2x)$ (iv) $(7p, -2p, 3p)$ and $(8pq, -5pq)$

(2) बैजिक राशी : क्रमांक : i, ii, iv, vi, vii,ix, xi
गणितीय विश्लेषण : क्रमांक : iii, v, viii, x

(3) एकपदी i, iv, vi ; बहूपदी : ii, v, vii ; त्रिपदी किंवा एकपदी : iii, viii, ix, x

(4) (i) 1 (ii) 3 (iii) 5 (iv) 4 (v) 2 (vi) 3 (5) (i) 1 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 3

(v) 4 (vi) 2 (6) $xy + yz$ $2x^2 + 3x + 5$

स्वाध्याय - 3 (पृष्ठ - 204)

(1) $3a + 2a = 5a$ (2) (i) $13x$ (ii) $10x$ (3) (i) 31 (ii) $-61°$ (iii) $11m^2$ (4) (i) -1

(ii) 4 (iii) -2 (5) -9 (6) $2x^2 + 11x - 9$ (7) (i) 3 (ii) 5 (iii) -1 (8) 54 cm × cm = 54 cm^2

(9) ₹. 90 (10) $s = \frac{d}{t} = \frac{135\,mt}{10\,\text{sec}} = \frac{27}{2}\,mt./Sec.,$ or $13\frac{1}{2}\,mt./Sec.,$ or $13.5\,mt./Sec.,$

स्वाध्याय - 4 (पृष्ठ - 209)

(1) (i) $-5x^2 + xy + 8y^2$ (ii) $10a^2 + 7b^2 + 4ab$ (iii) $7x + 8y - 7z$ (iv) $-4x^2 - 5x$

(2) $7x + 9$ (3) $18x - 2y$ (4) $5a - 2b$ (5) (i) $3a$ (ii) $y - 2z$ (iii) $6a^2 + 12ab + 4b^2$

(iv) $4pq + 3p^2 - 2q^2$ (v) $4 - 7x - x^2$ (vi) $8x^2 - 4xy - 9y^2$ (vii) $9m^3 + 4m^2 + 7m + 1$

(6) $7x^2 + xy - 6y^2$ (7) $x - 2x^2$ (8) $2x^2 - 5y^2 + 11xy + 40$ (9) $2a^2 + 6a + 5$

(10) (i) $22x^2 + 12y^2 + 8xy$ (ii) $-14x^2 - 10y^2 - 20xy$ or $-(14x^2 + 10y^2 + 20xy)$

11 - घातांक

स्वाध्याय - 1 (पृष्ठ - 214)

1. (i) $3 \times 3 \times 3 \times 3$ (ii) $7 \times x \times 7 \times x$ (iii) $5 \times 5 \times 5 \times a \times a \times a \times b \times b \times b$

(iv) $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times y \times y \times y \times y \times y$ 2. (i) 7^5 (ii) $3^3 \times 5^4$ (iii) $2^3 \times 4^4 \times 5^3$

3. (i) $2^5 \times 3^2$ (ii) 2×5^4 (iii) $2 \times 3^2 \times 5^3$ (iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$ (v) $2^5 \times 3 \times 5^2$

4. (i) 3^2 (ii) 3^5 (iii) 2^8 5. (1) 17 (ii) 31 (iii) 25 (iv) 1

स्वाध्याय - 2 (पृष्ठ - 225)

(1) (i) 2^{14} (ii) 3^{10} (iii) 5^5 (iv) 9^{30} (v) $\left(\frac{3}{5}\right)^{15}$ (vi) 3^{20}

(vii) 3^4 (viii) 6^4 (ix) 2^{9a} (x) 10^6 (xi) $\left(\frac{-5}{6}\right)^{10} = \frac{(-5)^{10}}{6^{10}} = \frac{5^{10}}{6^{10}}$

(xii) 2^{10a+10} (xiii) $\frac{2^5}{3^5}$ (xiv) 15^3 (xv) $(-4)^3$ (xvi) $\frac{1}{9^8}$ (xvii) $\frac{1}{(-6)^4}$

(xviii) $(-7)^{15}$ (xix) $(-6)^{16}$ (xix) a^{x+y+z} (2) 3^{10} (3) 2 (4) 2 (5) 1

(6) (i) सत्य (2+11=13) (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) असत्य (vii) सत्य

12 - चौकोन

स्वाध्याय-1 (पृष्ठ - 232)

(1) (i) बाजू: $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{RP}$ कोन: $\angle SPQ$, $\angle PQR$, $\angle QRS$, $\angle RSP$

बिंदू: P, Q, R, S कर्ण: $\overline{PR}$, $\overline{QS}$

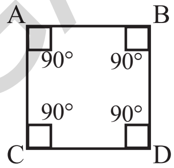
(ii) लगतच्या बाजूच्या जोड्या $\overline{PQ}, \overline{QR}$; $\overline{QR}, \overline{RS}$; $\overline{RS}, \overline{SP}$ and $\overline{SP}, \overline{PQ}$

लगतच्या कोनाच्या जोड्या : $\angle SPQ$, $\angle RSP$; $\angle RSP$, $\angle QRS$; $\angle QRS$, $\angle PQR$ आणि $\angle PQR$, $\angle SPQ$

विरूद्ध बाजूच्या जोड्या : $\overline{PS}$, $\overline{QR}$ आणि $\overline{QP}$, $\overline{RS}$

विरूद्ध कोनाच्या जोड्या : $\angle SPQ$, $\angle QRS$ आणि $\angle RSP$, $\angle PQR$

(2) 100° (3) 48°, 72°, 96°, 144° (4) 90°, 90°, 90°, 90°



(5) 75°, 85°, 95°, 105°

(6) चौकोनाचे कोन 180° नाही.

स्वाध्याय-2 (पृष्ठ - 242)

(1) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) सत्य (vi) सत्य (vii) सत्य (viii) सत्य

(2) (i) 4 बाजू आहेत (ii) चौकोनाच्या समोरासमोरील बाजू समांतर असतात.

(iii) चौरसाचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

(iv) चौरसाच्या विरूद्ध बाजू समान मापाच्या असतात.

(3) $\angle DAB = 140°$, $\angle BCD = 140°$, $\angle CDA = 40°$ (4) 50°, 130°, 50°, 130°

(5) याला 4 बाजू असून दोन बाजू समांतर असतात.; $\overline{CA}$, $\overline{DR}$ (6) 1

(7) विरूद्ध कोन समान नसतात. (8) 15 cm, 9cm, 15cm, 9cm

(9) समलंब चौकोनाच्या बाजू समान नसतात. (10) $\angle C = 150^{\circ}$, $\angle D = 150^{\circ}$

(11) (i) आयत	(ii) आयत	(iii) $180° - x°$
(iv) समान	(v) 10	(vi) 90°
(vii) 0	(viii) 10	(ix) 45

13 - क्षेत्रफळ आणि परिमिती

स्वाध्याय - 1 (पृष्ठ - 245)

(1) $2(l+b)$; a^2 (2) 60 cm; 22cm; 484 cm^2 (3) 280cm^2; 68cm; 18cm; 216cm^2; 10cm; 50cm

स्वाध्याय - 2 (पृष्ठ - 249)

(1) (i) 28cm^2 (ii) 15cm^2 (iii) 38.76cm^2 (iv) 24cm^2 (2) (i) 91.2cm^2 (ii) 11.4cm
(3) 42cm ; 30cm (4) 8cm ; 24cm (5) 30m, 12m (6) 80m

स्वाध्याय - 3 (पृष्ठ - 252)

(1) (i) 200cm^2 (ii) 12cm^2 (iii) 20.25cm^2 (iv) 12cm^2 (2) (i) 12cm^2 (ii) 3cm

(3) 30cm^2 ; 4.62 cm (4) 27cm^2 ; 7.2 cm

(5) 64cm^2 ; होय ; ΔBEC, ΔBAE आणि ΔCDE तीन त्रिकोणातून दोन समांतर आहेत. रेषा BC आणि रेषा AD, BC = AE+ED

(6) रामू ΔPQR मध्ये, PR हा पाया आहे, कारण $QS \perp PR$. (7) 40 cm (8) 20 cm ; 40cm
(9) 20 cm (10) 800cm^2 (11) 160cm^2 (12) 192cm^2 (13) 18 cm ; 12cm

स्वाध्याय - 4 (पृष्ठ - 257)

(1) (i) 20cm^2 (ii) 24cm^2 (2) 96cm^2 ; 150 mm : 691.2m^2 (3) 18cm (4) 506.25

स्वाध्याय - 5 (पृष्ठ - 260)

(1) (i) 220cm (ii) 26.4cm (iii) 96.8 cm (2) (i) 55m (ii) 17.6 m (iii) 15.4m

(3) (i) (a) 50.24 cm (b) 94.2 cm (c) 1256 cm (ii) 7 cm (4) 42 cm

(5) 10.5 cm (6) 3 times (7) $3\pi : 2\pi$ (8) 1.75cm (9) 94.20 cm (10) 12.3 cm

स्वाध्याय - 6 (पृष्ठ - 263)

(1) 475m^2 (2) 29.5m^2 (3) 624 m^2 (4) 68 m^2 (5) 9900 m^2 ; 200100m^2

14 - 2D आणि 3D आकाराचे आकलन

स्वाध्याय - 1 (पृष्ठ - 265)

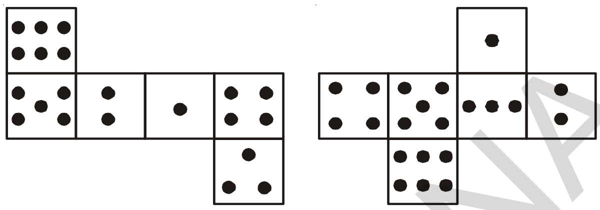
(1) गोलीय : फुटबॉल, क्रिकेट बॉल, लाडू
निमूळता : विजेरी, बिस्कीट पुडा, लॉग, मेणबत्ती
पिरॅमिड : पिरॅमीड, भांकाकृती : आगपेटी, खोड रबर, बिस्कीट पुडा
कोन : आईस्क्रीम, फुलदाणी : घन, फासा, कार्टून

(2) (i) कोन : आईस्क्रीम, नरसाळ्याचा वरचा भाग (ii) घन : फासा, कार्टून
(iii) गोलाकृती : पुसणी, विटा (iv) गोल : चेंडू, गोट्या (v) निमूळता : पेन्सिल, नळी

(3)		कोन	गोलाकृती	पिरॅमीड
	मुख	6	6	5
	किनारा	12	12	8
	बिंदू	8	8	5

स्वाध्याय – 2 (पृष्ठ – 267)

(1) कृती करा (2) i) C ii) a (3)



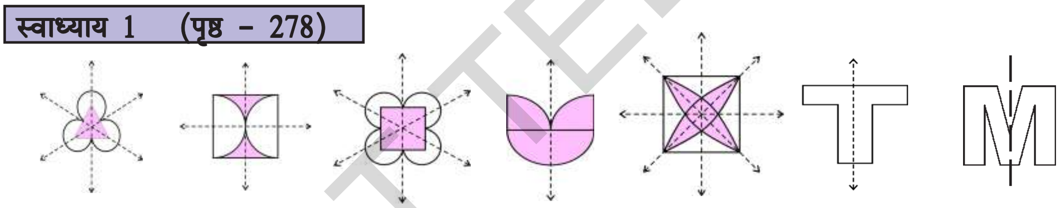
स्वाध्याय – 4 (पृष्ठ – 276)

(1) चेंडू : वर्तुळ
लांबनळी : आयत
पुस्तक : आयत

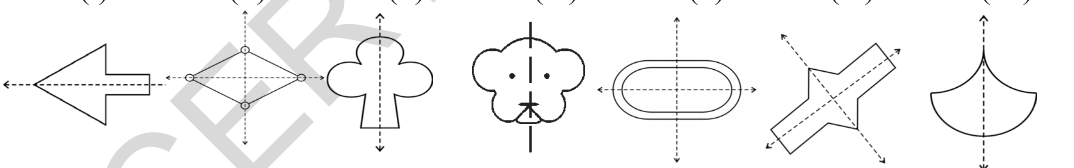
(2) (i) गोलीय / गोलाकार वस्तू
(ii) घन / चौरस कागद
(iii) त्रिकोणाकृती किंवा पिरॅमीड हा आयताकृती असतो.
(iv) गोलीय / आयताकृती कागद

15 – प्रमाणबद्धता

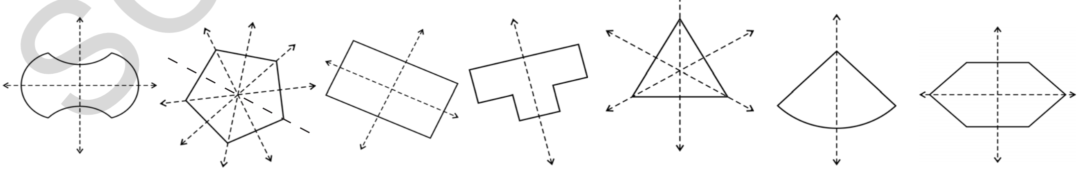
स्वाध्याय 1 (पृष्ठ – 278)



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi) (vii)

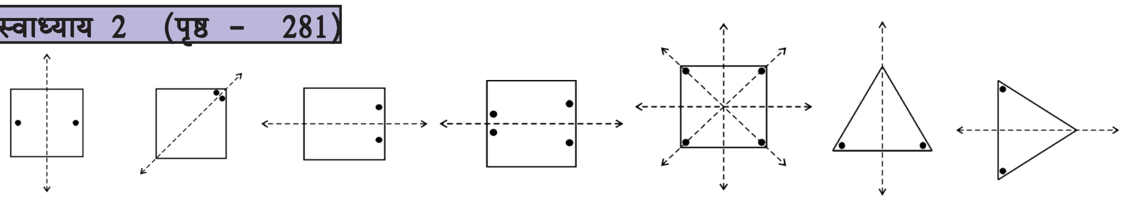


(viii) (ix) (x) (xii) (xiii) (xiv) (xv)

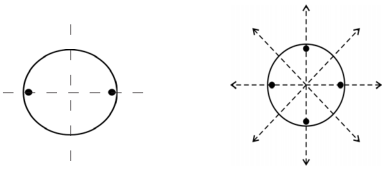


(xvi) (xvii) (xviii) (xix) (xx) (xxi) (xxiii)

स्वाध्याय 2 (पृष्ठ - 281)



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi) (vii)

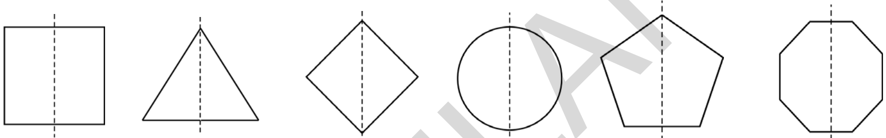


(viii) (ix)

(2)

(i) (ii) (iii) (ix)

(3)



(i) (ii) (iii) (iv) (v) (vi)

(4) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य

(5) दोन अक्षातील कोन = 360/2n =360/2x4 = 360/8 = 45^0
सर्व बहुभुजाकृतीसाठी सत्य आहे.

स्वाध्याय 3 (पृष्ठ - 286)

1. आकृती i, ii, iv आणि v चक्रीय सममिती आहे.
2. (i) 2 (ii) 4 (iii) 3 (iv) 4 (v) 4 (vi) 5 (vii) 6 (viii) 3
3.

चौरस	होय	90^0	4
आयत	होय	180^0	2
समलंब चौकोन	होय	180^0	2
समद्विभुज चौकोन	होय	120^0	3
काटकोन	होय	60^0	6
वर्तुळ	होय	अनंत	अनंत
अर्धवर्तुळ	नाही	-	-

स्वाध्याय 4 (पृष्ठ - 288)

1.

S	नाही	0	होय	2
H	होय	2	होय	2
O	होय	2	होय	2
N	नाही	0	होय	2
C	होय	1	नाही	1

शिक्षकांना सुचना

प्रिय शिक्षक

- इ.7 वीच्या निर्माण झालेल्या नवीन गणित विषयासाठी मनपुर्वक अभिनंदन व शुभेच्छा
- सध्याचे पुस्तक APSCF – 2011 व RTE – 2009 यावर उच्च प्राथमिक शाळांचा अभ्यासक्रम निगडीत आहे.
- हे नविन पाठयपुस्तक 15 घडयाळ समाविष असुन यामध्ये गणिताचे विविध शाखा, जसे संख्या पध्दती अंकगणितीय बीजगणित, भुमिती व संख्याशास्त्र या संकल्पनेचा समावेश आहे.
- या प्रकरणातील संकल्पना ह्रय येणारा शैक्षणिक वर्गासाठी गणित सोडविणे सिध्दता, संप्रेषण, सादरीकरण हया उद्देशास अनुसरून त्याच्या कौशल्याचा विकास करण्याच्या हेतुने केला असुन प्रश्न विचार प्रणालीचा वापर करून प्रश्न सोडविणे, व यांचा आपल्या दैनंदिन जिवनात कसा वापर करता येईल याचा सरासर विचार केला आहे.
- या पुस्तकात दिलेली उदाहरणे, कृती परिस्थिती हे विद्यार्थ्यांच्या स्पर्धात्मक व बालकांच्या प्राथमिक स्तराच्या विकासावर अवलंबुन आहे तर विद्यार्थी वर्गामधील सर्व कृती व गणिताचे अध्यनांचा आनंद होतील.
- याचे प्राथमिक उदिष्ट असे की, 'ज्ञानस्पनावर' याचा विचार करुन विद्यार्थी व शिक्षकामध्ये चर्चा घडुन या पुस्तकाची कृती सुचविल्या आहेत.
- विद्यार्थ्यांचा सारासर विचार करून यातील प्रकरण योजना करण्यात आली आहे.
- जेथे विद्यार्थ्यांना प्रश्न सोडविण्यासाठी अडचणी जानत तेथे, अगामी व उद्गामी पध्दतीचा वापर केल गोन आहे.
- प्रथम विद्यार्थ्यांना प्रक्रिया पाहाण्यात त्यांचा विचार करावा, त्या समजुन घ्याव्यात, आणि सोडविल्या रिती प्रमाणे स्वत: सोडविण्याचा प्रयत्न करावा. यासाठी या संलल्पना सादर केल्या आहेत.

ठळक स्पष्टीकरण आणि सुयोग चित्रे

- प्रत्येक प्रकरणाच्या शेवटी ष्हे कराष आणि ष्हे करून पहाष असे विस्तृत स्वाध्याय दिलेले आहेत ष्हे कराष या शिर्षकाखाली दिलेला स्वाध्याय हा शिकवलेल्या त्यावर आधारीत आहे दोन किंवा तीन संकल्पना शिकवल्यानंतर त्यावर आधारीत काही स्वाध्याय दिलेला आहे. हे करून पहा या मधील प्रश्न हे वास्तवाचे सामान्यकिरण विधानांचा अचुकपणा प्रश्न विचारणे इ. कौशल्य तपासण्याच्या भावनेतुन तयार करण्यात आलेले आहेत. हे करा या शिर्षकाखाली दिलेले स्वाध्याय आणि इतर स्वाध्याय हे विद्यार्थ्यांनी स्वत:चे स्वत: करण्यासाठी दिलेले आहेत ही पध्दत/प्रक्रिया शिक्षकांना हे माहीती करून घेण्यासाठी उपयोगी पडेल की, विद्यार्थ्यांनी शिकवलेल्या संकल्पना त्यांना कितपत कळतात
- हे करून पहा या क्षेत्रांतर्गत दिलेल्या स्वाध्याय सोडविण्यासाठी शिक्षक विद्यार्थ्यांना सहकार्य करू शकतात
- आपण काय शिकलो मध्ये दिलेली संपुर्ण संकल्पना विद्यार्थ्यांना समजणे;वचनी पडणे आवश्यक आहे.

Happy Teaching.

अभ्यासक्र म

(50 तास) 1 पूर्णांक 2 अपूर्णांक 1 पूर्णांक	(1) पूर्णांक पूर्णांकांचा गुणाकार आणि भागाकार (आकृतीबंधातून) पूर्णांकांचे गुणधर्म (बेरीज आणि गुणाकाराच्या ओळखीसह) (आकृतीबंधातुन) (तसेच पूर्ण संख्याची उदाहरणातून) गुणधर्म सामान्य रूपात व्यक्त करणे. प्रतिउदाहरणे तयार करणे. (उदा.) पूर्णांकयुक्त शाब्दीक स्वाध्याय (सर्व क्रिया)
	2. अपूर्णांक, दशाश अपूर्णांक आणि परिमेय संख्या अपुर्णांकांचा गुणाकार चा हा अपुर्णांकांचा कारक अपुर्णांकाचा गुणाकार व्यस्त आणि त्याचे उपयोग अपुर्णांकाचा भागाकार पुर्णांकयुक्त अपुर्णांक असलेली शाब्दीक उदाहरणे (स्वाध्याय) (दैनंदिन जीवनाशी निगडीत) परिमेय संख्याची ओळख (संख्यारेषेवर दाखविण्यासोबत) अपुर्णांक आणि परिमेय संख्यामधील घटक परिमेय संख्या दशाश अपुर्णांक म्हणून दर्शविणे परिमेय संख्यावरील शाब्दीक उदाहरणे (सर्व क्रिया) दशांश अपुर्णांकाचा गुणाकार आणि भागाकार एककांचे रूपातंर (लांबी व वस्तुमान) शाब्दीक उदाहरणे (सर्व क्रियांचा समावेश असलेली)
बिजगणित 20 तास 11. घातांक 10. बैजिक राशी 3. सोपी समीकरणे	घाताक आणि घात-ओळख a^x मधील x चा अर्थ जेथे a Ý Z घाताकांचे नियम (आकृतीबंधाच्या निरीक्षणातुन 5 प्रकारच्या सामान्यी करणाकडे) जेथे M, n ∈N(i) $a^m a^n = a^{m?+n}$(ii)? $(a^m)^{?n} = a^{mn}$(iii) $a^m/a^n =$ a^{m-n}, where (m-n) ∈ N(iv) $a^m.b^m = (ab)^m$(v) (अ)शुन्य घातांक असलेली संख्या (अप)दशांश संख्या प्रमाणात दाखविणे/व्यक्त करणे. (शास्त्रीय चिन्हाद्वारे दाखविणे)
	बैजिक राशी : एक किंवा दोन चले असलेल्या सामान्य बैजिक राशीची (सोप्या) ओळख स्थिरांक सहगुणक घात यांची ओळख समान पदे आणि वेगळी पदे राशीचा घात उदा x^2y इत्यादी (घातांक ?3 चलनांची संख्या ?2 बैजिक राशीची बेरिज वजाबाकी (सहगुणक हा पुर्णांक असायला पाहिजे)
	सोपी समिकरणे दोन क्रियासह एक चल असलेली (उदाहरणाच्या संबंधामध्ये) सोपी रेषीय समीकरणे (जेथे पुर्णांक हा सहगुणक असेल)
6 शेकडेवारी टक्केवारी आणि त्याचा वापर (20 तास)	गुणोत्तर आणि प्रमाण (उजळणी) चालू एकेरी पध्दत, एकत्रीकरण सामान्य समीकरणे संयुक्त गुणोत्तर : सोपी शाब्दीक उदाहरणे टक्केवारी-ओळख टक्केवारी म्हणजे 100 हा छेद असलेला अपुर्णांक हे समजुन घेणे. अपुर्णांक आणि दशांश अपुर्णांकाचे टक्केवारीत रूपांतर करणे आणि उलटपक्षी तसे करणे. नफा आणि तोटा (एकेरी व्यवहार) पध्दत सरळ व्याजावरील क्रिया (कालावधी हा पुर्ण वर्षात)

भुमिती आकार समजणे 4 रेषा आणि कोन त्रिकोण 5 त्रिकोण आणि त्याचे गुणधर्म 8 त्रिकोणाची एकरूपता 9 त्रिकोणाची रचना 12 चौकोन 15 प्रमाणबद्धता 14 2 डी आणि 3 डी आकाराचे आकलन	(1)रेखा आणि कोन कोनाच्या जोड्या (रेषीय, पुरक, कोटीकोन, लगतचे विरूध्द लंब विरूध्द लंब) कोनांचापडताळा आणि सोपी सिध्दता संमातर रेषेचे छेदिकेसह गुणधर्म (आळीपाळीने, संगत, अंतर्गत, बाह्यकोन)
	त्रिकोण बाजुवरून आणि कोनावरून त्रिकोनाचे प्रकार त्रिकोणाची व्याख्या गुणधर्म बाजुंची बेरीज, दोन बांजुचा फरक कोन बेरीज गुणधर्म सिध्दतेच्या कल्पनेसह आणि कागदांच्या घड्याने पडताळा समांतर रेषाच्या गुणधर्माच्या साहायाने सिध्दता आणि पडताळा रचना यातील फरक त्रिकोणाच्या अंतर्गत कोनाचे गुणधर्म
	एकरूपता : घड्या घालुन (एकमेकांवर ठेवुन) एकरूपता उदा. ब्लेड, स्टॅप इ. सोप्या भौमितीक आकाराची एकरूपता वाढविणे नेणे उदा. त्रिकोन, वर्तुळ एकरूपतेचे निकष (फक्त पडताळा पद्धतीने) त्रिकोणाच्या बाकोबा, बाबाबा, कोबाको, कर्णभुजा, प्रमेयानुसार एकरूपतेचे गुणधर्म आकृत्याशी गुणधर्म
	त्रिकोणाची रचना (सर्व नमुना) जेव्हा त्रिकोनाच्या तीन बाजू माहित असतात तेव्हा त्रिकोन काढणे (बाबाबा कसोटी) जेव्हा त्रिकोनाच्या दोन बाजू आणि त्या बाजू मध्ये समाविष्ठ कोनाचे माप दिलेले असते तेव्हा त्रिकोन काढणे (बाकोबा कसोटी) जेव्हा त्रिकोणाचे दोन कोन आणि त्या कोनामध्ये समाविष्ठ बाजूचे माप दिलेले असते तेव्हा त्रिकोन काढणे (कोबाको कसोटी) पायाची लांबी आणि कर्ण दिला असता काटकोन त्रिकोन काढणे (कर्ण भुजा प्रमेय)
	चौकोन : चौकोन-व्याख्या चौकोन बाजू कोन कर्ण अंतर्गत, बहिर्गत चौकोन बहिर्वक्र, अंतर्वक्र चौकोनातील आकृत्याच्या सहायाने फरक कोनांचा बेरीज गुणधर्म (पडताळा पध्दतीने उदाहरणे सोडवून) चौकोनाचे प्रकार संमातरभुज चौकोन, समलंब चौकोन समभुज चौकोन आयत चौरस आणि पतंगाचे गुणधर्म
	प्रमाणबद्धता सममितीचे प्रतिबिंब काढणे चक्राकार सममितीचे कल्पना, चक्राकार सममितीच्या 2 वस्तुचे निरीक्षण (90^0,120^0,180^0) 90^0 आणि 180^0 मधुन साध्या आकृत्याच्या चक्राकार क्रिया चक्राकार आणि प्रतिबिंबीत सममितीची आकृत्या निशी उदाहरणे (दोन्ही क्रिया) प्रतिबिंब आणि चक्राकार सममिती असलेल्या आकृत्यांची उदाहरणे आणि उलटपक्षी तसेच

	2 डी व 3 डी चे आकार समजणे 1 3 डी असलेल्या आकृत्या 2 डी लपलेल्या भागामुळे दाखविणे 2 बिंदू कडे आकृती व जाळे यांची ओळख व मोजणी(धन,धनाकृती,दंडगोलाकृती,शेकु) 3 दिलेल्या वस्तुसोबत चित्राची जुळवणी करणे.
क्षेत्रफळ आणि परिमितीचे मापन (15 तास) महत्वमापन	क्षेत्रफळ आणि परिमिती आयताचे व चौरसाचे क्षेत्रफळ आणि परिमितीचे सिंहावलोकन/पुनरावृत्ती वर्तुळाच्या परिघाती कल्पना क्षेत्रफळ मुलभूत एकक वापरून मापनाची संकल्पना त्रिकोन समलंब चौकोन समजुन आणि आयताकृती रस्त्याचे क्षेत्रफळ
सामग्रीची हाताळणी माहिती हाताळणी	माहितीचे जोडणी व संघटन असंघटीत माहितीचे मध्य, मध्यांक व मंध्यातंर काय दर्शवितात ते दाखविणे स्तंभालेख वाचने स्तंभालेखाचे मांडणी

शैक्षणिक मानके

आशय		शैक्षणिक मानके
1.संख्या पध्दती	स्वाध्याय	पुर्णांकांच्या चार मुलभुत क्रियांचा उपयोग करून स्वाध्याय सोडविणे व पुर्णांकांचा वापर करून शाब्दीक स्वाध्याय सोडविणे संख्यात्मक विधाणे सोडविण्यासाठी कंसाचा (ब्रॅकेट) उपयोग करणे
	कारण सिध्दता	0 ने कोणत्याही संख्येला भागणे अर्थशुन्य (अर्थहिन)का आहे ते स्पष्ट करणे नैसर्गिक संख्यांचा संच आणि पुर्णांक संख्यांचा संच यातील फरक आणि तुलना
	संवाद:	पूर्णांक संख्यांचे गुणधर्म सामान्य रूपात व्यक्त करणे. वेगवेगळया संदर्भाने नकारात्मक चिन्हांचा उपयोग करणे
	जोडणी (संबध):	दैनंदिन जीवनातील प्रसंगामध्ये पुर्णांकांचा उपयोग शोधणे N, W आणि z मधील संबंध (नाते) समजुन घेणे.
	सादरीकरण:	संख्यारेषेवर पुर्णांक दाखविणे. संख्यारेषेवर पुर्णांकावरील क्रिया करणे.
2. अपूर्णांक दशांश अपुर्णांक आणि परिमेयसंख्या	स्वाध्याय	अपुर्णांकावरील सर्व क्रिया असणारे स्वाध्याय सोडविणे. व परिमेय संख्येवरील सर्व शाब्दीक क्रिया असणारे स्वाध्याय सोडविणे. दशांश अपुर्णांकावरील सर्व क्रिया असणारे स्वाध्याय सोडविणे. लहान एककांचे मोठ्या एककांमध्ये रूपांतर करणे आणि उलटपक्षी तसेच करणे.
	कारणे आणि सिध्दता	परिमेय संख्या आणि अपुर्णांकामधील फरक दाखविणे.
	संवाद	परिमेय संख्यांच्या संचाची आवश्यकता स्पष्ठ करणे परिमेय संख्याचे गुणधर्म सामान्य रूपात व्यक्त करणे.
	जोडणी(संबंध)	अपुर्णांकांचे, परिमेय संख्याचे आणि दशांश अपूर्णांकाचे उपयोग/त्याचे एकमेकांशी असलेले संबंध शोधणे.
	सादरीकरण	संख्यारेषेवर परिमेय संख्या दाखविणे. परिमेय संख्या दशांश रूपात दाखविणे.
बिजगणित घातांक आणि घात	स्वाध्याय	मुळ अवयव पाडून मोठ्या संख्या घातांकित रूपात लिहिणे.
	कारण आणि सिध्दता	आकृतीबंधाचे (नमुन्यांचे) निरीक्षण करून घातांकाच्या नियमाचे सामान्यकरण करणे.
	संवाद	a^x मधील x चा अर्थ समजणे जेथे a z मोठ्या संख्यांचा वापर करताना घातांक रूपाचा उपयोग करणे.

	जोडणी :	खाली दिलेल्या मोठ्या संख्याचे मुळ संख्या वापरून अवयव पाडा.
	सादरीकरण	मोठ्या संख्या विशेष रूपात व्यक्त करा.
बिजगणित 10 बैजिक राशी 3. सोपी उदाहरणे	स्वाध्याय	बिजगणित उदाहरणाचे पद शोधा बिजगणितीय उदाहरणाचे बेरीज वजाबाकी करणे सहायक संख्या ही पुर्ण संख्या असली पाहिजे
	कारणे आणि सिद्धता	शाब्दीक समस्या दोन क्रियांचा उपयोग करून सोडवा. (जे साध्या समीकरणात एकचला मध्ये व्यक्त करता येवू शकतो.)
	संवाद	एक किंवा व्दिचलामध्ये प्रथम, व्दितीय, तृतीय चे विरोध स्वरून लिहा. दैनंदिन जिवनातील उदाहरणाचे साध्या स्वरूपात करावे (फक्त एक चलाचा समावेश)
	जोडणी	बिजगणितीय बेरीज व एकांकिचे संवादात उपयोग व अभिव्यक्त करणे. साध्या समिकरणाचा दैनेदिन जिवनामध्ये उपयोग
	सादरीकरण	बिजगणितीय समिकरणाचा विशेष स्वरूपात सादरीकरण
6. टक्केवारी आणि त्याचे उपयोग	स्वाध्याय	दोन प्रमाणातील व्यस्त सेख्या शोधा एकमान पध्दतीचा उपयोग करून उदा. सोडवा टक्केवारीचा उपयोग करून शाब्दीक उदा. सोडवा. साध्या व्याजाचा उपयोग करून शाब्दीक उदा. सोडवा.
	कारणे आणि सिद्धता	दशमानची तुलना करून टक्केवारी मध्ये रूपांतर करा. प्रमाण व गुणोतर याची सामान्य तत्वे शोधने.
	संवाद	अपुर्णांक संवादाला टक्केवारी आणि दशमान पद्धतीचा उपयोग व्यक्त करा.
	जोडणी	दैनंदिन जिवनाच्या फायदा व तोटा या संकल्पनेचा उपयोग करा. दैनंदिन जिवमधील टक्केवारीतील समस्यावरील उपाय समजणे.
	सादरीकरण	अपूर्णांक आणि दशमान पद्धतीचे टक्केवारी पद्धती मध्ये रूपांतर करा.

भुमितीय व आकार समजणे 4 रेषा आणि कोन	स्वाध्याय	रूपातर रेषेने कोनावर केलेल्या जोडणी व देईकाचे
	कारण आणि सिद्धता	दिलेल्या कोनामधून कोनाच्या जोड्रया वेगळे करणे संमातर रेषेचे गुणधर्म वापरून दिलेल्या संमातर रेष पडताळुन पाहणे कागदाच्या घडीचा उपयोग करून संमातर रेषेच्या कोन आणि गुणधर्मींची पडताळणी व सिद्धता दाखवा
	सवाद	कोनाच्या जोड्र्याचे उदा. द्या.
	जोडणी	आपल्या परिसरातील संमातरतेचे निरिक्षण करणे
	सादरीकरण	कोन चिन्ह अंकित सादर करणे.
5. त्रिकोन आणि त्याचे गुणधर्म	स्वाध्याय	खाली दिलेले बाजूची लांबी त्रिकोणाच्या आकाराची योग्य आहे कि नाही ते ठरवा. खाली दिलेल्या कोनामधून असा कोन शोधा कि जो त्रिकोनावरील बाह्रय कोनावर दिलेला नाही.
	कारणे आणि सिद्धता	बाह्य कोन आणि त्याच विरूध्द त्याच्या मधील त्रबद्ध त्याचे दाखवा खाली दिलेला त्रिकोन त्यांची बाजू व कोन यांच्या आधारे वर्गीकरण करा. खालील त्रिकोनाचे निरिक्षक कडून त्रिकोणाच्या प्रकारचा अंदाज लावा.
	संवाद	कोनाच्या व बाजूच्या प्रमाणे विविध प्रकारचे त्रिकोन स्पष्ट करा. त्रिकाणातील बाह्य कोनाची गुणधर्म स्पष्ट करा.
	जोडणी	त्रिकोण या संकल्पनेचा उपयोग करा
	सादरीकरण	
8.त्रिकोणाची एकरूपता	स्वाध्याय	खाली दिलेल्या त्रिकोणामधून एकरूप त्रिकोन ओळखा. कारणे
	सिद्धता	
	संवाद	2 डी आकारामधील एकरूपता जाणणे.
	जोडणी	
	सादरीकरण	चिन्हाचा उपयोग करून एकरूप त्रिकोन सादर करणे.

9. त्रिकोणाची रचना	स्वाध्याय	त्रिकोणाची रचना दिलेल्या मापावरून काढणे.
	कारण आणि सिद्धता	
	संवाद	
	जोडणी	
	सादरीकरण	
12. चौकोन स्वाध्याय	स्वाध्याय	
	कारण आणि सिद्धता	चौकोनाचे अंतरंग आणि बाहयर्गातील फरक चौकोनाचे गुणधर्म शोधणे आणि तपासणे
	संवाद	चौकोन आणि त्रिकोणातील फरक स्पष्ट करणे. विविध प्रकारच्या चौकोनाचे गुणधर्म स्पष्ट करणे.
	जोडणी	चौकोनाची व्याख्या सांगणे. चौकोनाचे गुणधर्म आणि त्याचे संबंध स्पष्ट करणे.
	सादरीकरण	
15 प्रमाणबद्धता	स्वाध्याय	चक्रिय कोनाची प्रमाणबद्धता शोधणे.
	कारण आणि सिद्धता	वेगवेगळया वस्तू किंवा आकृतीचा रेषीय आणि परावर्तित प्रमाणबद्धतेत
	संवाद	परावर्तन प्रमाणबद्धतेची उदाहरणे दया.
	जोडणी	
	सादरीकरण	

14. 2डी आणि 3 डी आकार समजणे	स्वाध्याय	आकृती, कडे, बिंदु, जाळे ओळखणे आणि मोजणे. 3डी आकृतीसाठी धन, धनाकार, शंकु, दंडगोलाकृती
	कारणे आणि सिद्धता	3डी दिलेले वस्तुची दृष्य स्वरूपात असलेले आकार, कडे, व बिंदुच्या आकृत्याची जुळवणी करणे.
	संवाद	
	जोडणी	
	सादरीकरण	3 डी आकार 2डी आकार काढू शकणे.
13. क्षेत्रफळ आणि परिमितीचे मापन	स्वाध्याय	क्षेत्रफळ, चौरसाची परिमिती, आयत, समलंब चौकोन, त्रिकोन, समभुज चौकोन च्या आकाराची उदाहरणे सोडणे
	कारणे आणि सिद्धता	चौकोन त्रिकोण समांतरभूज चौकोन त्रिकोणाच्या आकारातील संबंध ओळखून त्याच्या त्रिकोणातील क्षेत्रफळ शोधाणे समलंबचौकोनातील त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ समजून घेणे
	संवाद	मापनाच्या मुलभुत एकक वापरून संकल्पना स्पष्ट करणे
	जोडणी	दैनंदिन जिवनामध्ये उपयोगात येणार्या क्षेत्रफळ व परिमिती होणारा वापर शोधने (चौकोन, आयात, समलंब चौकोन, त्रिकोन, समभुज चौकोन आणि वर्तुळ) आयत व वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाच्या संकल्पनेत उपयोग करणे. आयताकृती रस्ता, वर्तुळाकार रस्त्याचे क्षेत्रफळ शोधने.
	सादरीकरण	शाब्दीक उदाहरणे संख्यामध्ये स्पष्ट सादर करणे.
7. माहितीचे व्यवस्थापन	स्वाध्याय	कच्चा माहितीचे वर्गीकृत केलेल्या माहिती मध्ये संघटन करणे. असंघटीत माहितीचे, मध्य, मंध्याक, मंध्यातराची उदा. सोडविणे.
	कारणे आणि सिद्धता	असंघटीत माहितीचे मध्य,मंध्याक समजणे आणि सादर करणे.
	संवाद	असंघटित माहितीतील मध्य, मंध्याक, मंध्यातर स्पष्ट करा.
	जोडणी	दैनंदिन जिवनातील व परिस्थितीतील मध्य, मध्यकास उपयोग समजणे. दैनंदिन जिवनातील परिस्थिती मधील व्दितीय आलेख आणि चपम आलेखचा उपयोग समजणे वार्षिक लोकसंख्या, अर्थसंकल्प, पिकाचे उत्पादन इ.
	सादरीकरण	असंघटित मध्य, मध्यांक, मंध्यातर याचे सादरीकरण करणे माहितीचे डब्बल बार आलेख व पाय आलेखाच्या द्वारे सादरीकरण करणे